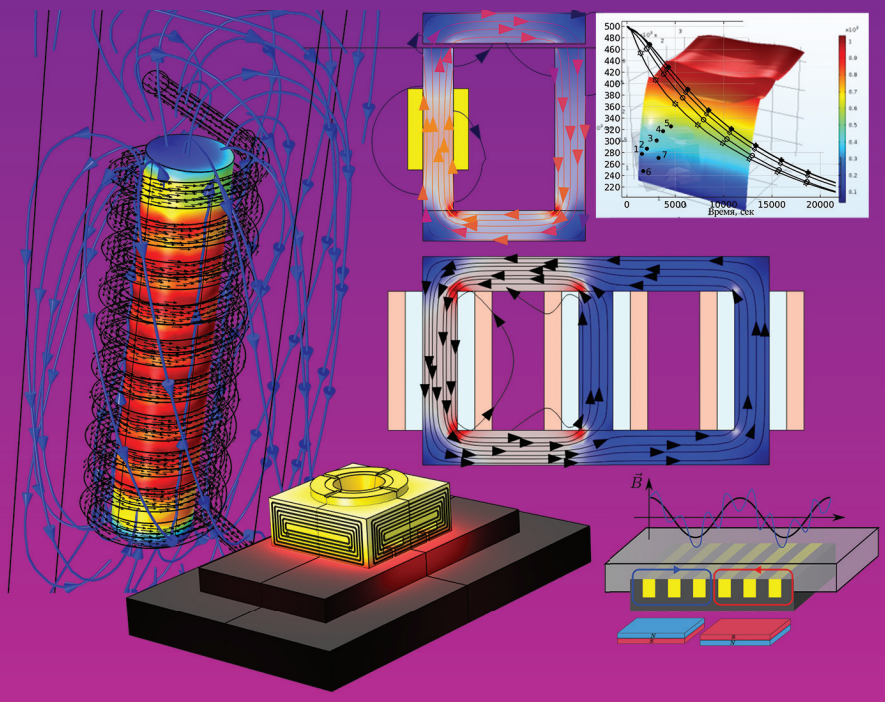
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Уральский энергетический институт

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ УСТАНОВОК В СРЕДЕ COMSOL MULTIPHYSICS

Учебно-методическое пособие



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Математическое моделирование электромеханических установок в среде Comsol Multiphysics

Учебно-методическое пособие

Под общей редакцией доктора технических наук,
профессора Ф. Н. Сарапулова

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов вуза, обучающихся
по направлению подготовки
13.04.02 — Электроэнергетика и электротехника

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2021

УДК 004.942:621.31(075.8)
ББК 22.18я73+31.2я73
М34

Авторы:
И. А. Смольянов (гл. 1, 7, 8, 10), Ф. Н. Сарапулов (гл. 2),
С. Ф. Сарапулов (гл. 3, 4), С. А. Бычков (гл. 5, 6),
Ф. Е. Тарасов (гл. 8, 9)

Рецензенты:
кафедра «Электрофикация горных предприятий» ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет» (завкаф. д-р техн. наук, проф. А. Л. Карякин);
директор науч.-техн. центра ООО НПП «РЭЛТЭК» канд. техн. наук С. М. Фаткуллин

М34 **Математическое моделирование электромеханических установок в среде Comsol Multiphysics** : учебно-методическое пособие / И. А. Смольянов, Ф. Н. Сарапулов, С. Ф. Сарапулов [и др.] ; под общ. ред. д-ра техн. наук, проф. Ф. Н. Сарапулова ; М-во науки и высш. образования РФ.— Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2021.— 255, [1] с.

ISBN 978-5-7996-3373-8

В пособии рассмотрены основные подходы численного моделирования электромеханических установок с помощью программного обеспечения Comsol Multiphysics. В разделе А приведена теоретическая часть, в разделе Б – лабораторные работы. В приложении приведены справочные материалы, необходимые для освоения студентами курса.

Пособие рекомендовано студентам для освоения курсов «Расчет электромагнитных и тепловых полей» и «Специальные вопросы моделирования электротехнологических систем», для написания выпускных квалификационных работ и магистерских диссертаций; также может быть полезно инженерам-электротехнологам.

Табл. 11. Рис. 98. Прил. 1.

УДК 004.942:621.31(075.8)
ББК 22.18я73+31.2я73

ISBN 978-5-7996-3373-8

Оглавление

Введение

Перед учеными и инженерами всегда стоял вопрос количественного описания физических процессов, протекающих в природе или технической установке. Инструменты и методы, используемые в расчетах, зависят от прогресса в компьютерной технике и вычислительной математике, поэтому в начале и середине XX в. в основном преобладали аналитические методы расчета [1]. Численные же методы были предложены инженером-механиком Иваном Бубновым в 1913 г. [2]. Хотя в них и предполагалось большое количество допущений и математических выкладок, но времени на эти процедуры было значительно меньше, чем на решение тысяч уравнений, которые предполагается использовать в рамках численных методов. С середины XX в. в расчетах начинают активно использовать одновременно теорию поля и теорию цепей. И на этом стыке рождаются новые подходы расчета цепей на основе детализированных [3, 4], структурных [5], непланарных [6] и ряда других типов схем замещения. Такие подходы предполагали ббльшую точность результатов при изменении большего количества параметров по сравнению с аналитическими подходами. Многие задачи совмещали в себе дискретную модель с аналитическими выражениями.

С развитием в 1990-е гг. полупроводниковой техники существенно улучшилась ситуация с вычислительными возможностями. В это же время началось бурное развитие численных методов, таких как методы конечных элементов, конечных разностей, конечных объемов, различных бессеточных методов и т. д. На сегодняшний день разработано такое количество математических пакетов, что невозможно упомянуть их все в одной работе. Например, электронный ресурс [7], в котором сравниваются порядка 78 пакетов, основанных на методе конечных элементов, представляет лишь малую долю существующих пакетов для численного моделирования.

Активное использование методов численной оптимизации снова поставило вопрос о необходимости применения в расчетах, особенно в инженерной практике, методов с небольшими требованиями к вычислительным ресурсам. Поэтому появляются новые работы [8, 9] по созданию моделей со сниженным порядком системы. Для этих целей используют современные подходы машинного обучения. В данных подходах получают натренированную систему данных, которая, располагая некоторыми входными параметрами, выдает требуемые значения для пользователя. Тренировка таких систем часто требует времени и не всегда целесообразна. И в очередной раз становится понятным, что история циклична, так как инженеры и ученые возвращаются к аналитическим подходам [10], модернизированным методам, основанным на теории цепей [4] для решения таких задач.

Невозможно сразу в одной работе рассмотреть всю многогранность возможностей по вычислениям даже для ограниченного круга интересов, как электротехнология и электромеханика. Поэтому в данной работе пойдет речь о численном методе конечных элементов в приложениях к электротехнологии и электромеханике, который реализован в коммерческом пакете Comsol Multiphysics.

Данный пакет имеет дружественный для пользователя интерфейс и много сопровождающей литературы, выпускаемой разработчиками [11, 12]. В отличие от множества численных пакетов, он имеет интегрированную оболочку, в которую включается множество модулей, между которыми удобно устанавливать связи, создавая мультифизические модели. Существует и ряд недостатков, например слабо развитая структура вычислений на графических процессорах по сравнению с ANSYS и рядом других пакетов. Ряд моделей не соответствует современным тенденциям развития науки, например модели турбулентности или методы оптимизации. Однако это легко нивелируется с помощью встроенной интуитивно понятной связки с пакетом Matlab, в котором реализовано множество методов оптимизации.

Сегодня очень популярны Open Source пакеты, поэтому необходимо сравнить Comsol Multiphysics с такими программами. Основное преимущество открытых пакетов – это открытый, доступный математический код любому пользователю, возможность моделирования без вложения каких-либо финансовых средств. К таким пакетам можно отнести GetDP, Elmer, OpenFOAM и т. д. Для работы с подобным типом пакетов

необходимо иметь хороший уровень знаний физики, математики и программирования. В большинстве случаев эти программы не имеют интегрированного интерфейса, что усложняет процесс моделирования, особенно для новичков. Приведем пример: отдельная программа (например GMESH) служит для создания сетки геометрии, следующий код (программа) служит для задания физических свойств, описания математических уравнений на этой сетке, настройки решателей и собственно реализации самого решения (допустим, Elmer или OpenFOAM), и затем полученный набор данных необходимо перенести в другой пакет, в котором будут обработаны эти результаты (часто используют ParaView). Такой процесс очень сложен и требует существенного времени для пользователей. В Comsol все эти операции встроены в одну программу и реализованы достаточно удобно.

В этой книге читателю предлагается ознакомиться с основами численного моделирования при помощи метода конечных элементов, используя программу Comsol Multiphysics.

Раздел A

Глава 1.

Что такое МКЭ?

Часто приходится встречаться с ошибочным мнением о том, что́ такое метод конечных элементов, в частности, как и другие дискретные модели. Многие по ошибке считают, что метод конечных элементов включает в себя математически описанные законы природы (физики), дискретизацию расчетной области, решение и обработку результатов. Поэтому стоит более подробно разобрать, каким способом происходит математическое моделирование какого-либо объекта (рис. 1.1), что понимается под предсказанием поведения данного объекта на основе каких-либо объективных законов.

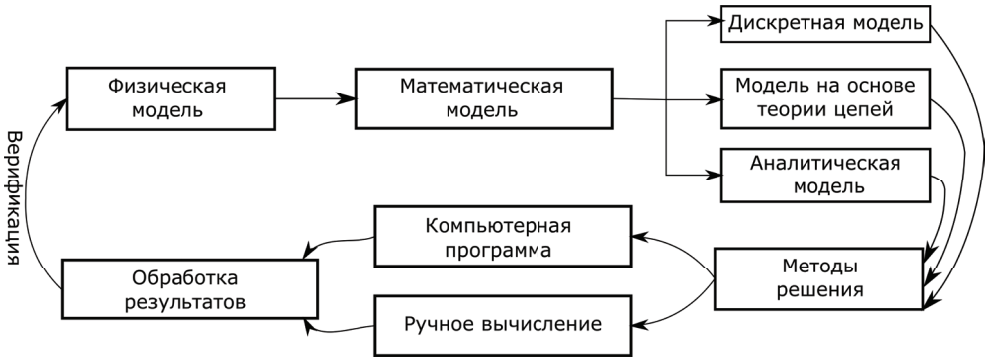


Рис. 1.1. Процесс формирования математической модели

Изначально на основе эмпирического знания (физической модели, см. рис. 1.1) строятся гипотезы, выводятся закономерности протекания физических процессов в объекте или для рассматриваемого явления. На ос-

нове данных закономерностей формируется теория, в большинстве случаев в основе которой лежит математический аппарат (математическая модель, см. рис. 1.1). Описание законов физики для задач с пространственной и временной зависимостью, как правило, выражается в терминах частных дифференциальных уравнений (ЧДУ). Решение этих уравнений без каких-либо математических допущений практически невозможно. В качестве примера таких допущений можно привести дискретизацию, ограничение пространственной области, снижение нелинейностей физических величин, уход от резких изменений исследуемой функции физической величины (разрывов), уход от пространственных производных и т. д. Для подавляющего большинства задач данные уравнения не могут быть решены аналитически.

Одним из возможных подходов для получения решения такого типа уравнения является численное решение (дискретные модели, см. рис. 1.1). Главное назначение дискретных моделей – замена членов с пространственными производными в уравнениях, которые описывают исследуемую систему, путем разбиения пространства на конечные элементы. Предполагается, что в этих конечных элементах функция исследуемой физической величины аппроксимируется линейно (в некоторых случаях полиномиально) и она непрерывна. Такой подход позволяет свести систему дифференциальных уравнений с пространственными производными к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). К численным подходам относят методы конечных элементов, конечных разностей, конечных объемов, конечных поверхностей и множество других методов. В данном пособии решение всех задач рассматривается на основе метода конечных элементов, поэтому целесообразно остановиться на объяснении принципа только данного метода. Но стоит упомянуть, что существуют и другие способы представления частных дифференциальных уравнений в виде СЛАУ или функций, которые однозначно разрешаются, – это модели на основе теории цепей и аналитические модели.

Решение СЛАУ является следующим шагом к получению результатов. Выбор решателя будет существенно влиять на точность полученных результатов. На данном этапе происходит также переход от производных по времени к решению нескольких СЛАУ. Это зависит от типа выбора решателя и дискретизации временной производной. Далее вышеупомянутые выкладки реализуются в компьютерной среде или их решают вручную, в зависимости от объема математических операций. Послед-

ним этапом формировнаия математической модели является обработка и представление полученных результатов. Полученные результаты сравнивают с экспериментальными данными физической модели и, в зависимости от степени их различия, пытаются модернизировать каждый из блоков рис. 1.1.

Подводя итог сказанному выше, можно отметить, что основной смысл метода конечных элементов заключается в представлении системы дифференциальных уравнений на ограниченной области как системы линейных уравнений. При этом исследуемая область разбивается на конечные элементы, тогда ЧДУ можно с достаточной погрешностью конечного результата рассматривать как алгебраические уравнения для пространственных производных. Стоит отметить, что данный метод дает приближенное решение, но достаточное для большинства задач. Дальше рассмотрим принцип МКЭ с точки зрения математического аппарата.

1.1. Типы математических уравнений

При решении задач физики необходимо понимать различие между алгебраическими уравнениями, обычными дифференциальными уравнениями и ЧДУ. Законы физики чаще всего выражаются на языке математики. Например, законы консервативной энергии, консервативных масс, консервативного момента и т.д. могут быть выражены через ЧДУ. Определяющие соотношения могут быть использованы при выражении этих законов с переменными условиями, таких как температура, плотность, скорость, электрический потенциал и др. Их будем называть зависимыми переменными. Небольшое изменение зависимых переменных в дифференциальных уравнениях относительно независимых переменных (x, y, z, t) называют производными зависимых переменных по отношению к независимым переменным. В некоторых случаях независимая переменная может стать зависимой, например в задачах механики. Примем, что существует твердое тело с изменяемой во времени скоростью, но не зависящей от пространственного расположения. В данном случае уравнение консервативной инерционной энергии сводится к уравнению (1.1), описывающему изменение скорости за очень маленький промежуток времени из-за наличия усилий,

$$m\frac{dv}{dt} = F(v,t) - F_c(v,t), \tag{1.1}$$

где m – масса; $F(v,t)$ – внешнее усилие; $F_c(v,t)$ – усилие сопротивления. Скорость v является зависимой переменной, а t – независимой переменной. Функция $F(v,t) - F_c(v,t)$ может описывать усилие в зависимости от скорости и времени.

Уравнение (1.1) является дифференциальным уравнением (ДУ), выраженным через условия производной одной независимой переменной t. Такое ДУ называется обычным дифференциальным уравнением (ОДУ).

Значение скорости в начальный момент времени называют начальным условием, позволяющим найти аналитическое решение уравнения (1.1),

$$v = f(t). \tag{1.2}$$

Скорость твердого тела выражается через алгебраическое выражение (1.2), где полученные значения времени соответствуют значениям скорости в данное время. Алгебраическое выражение не содержит производных, а описывается только при помощи математических функций (косинус, синус, экспонента, степенная функция и т.д.).

Существует много различных вариаций функции состояния описываемой среды или физического тела во времени и пространстве. Например, температура в твердом теле в точке, расположенной ближе к источнику тепла, может быть несколько выше, чем в других местах. Следовательно, такая вариация создает условия для образования теплового потока между различными частями внутри твердого тела. Подобные физические процессы описываются с помощью уравнений в частных производных. Запишем ЧДУ в общем виде для двух независимых переменных [13]:

$$a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2b\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F\left(x, y, u\right) = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения являются кусочно-непрерывными функциями пространственных координат, не обращающимися в нуль одновременно во всей исследуемой области. В зависимости от значений коэффициентов уравнений выделяют 3 основных типа уравнений в частных производных:

- Эллиптическое уравнение вида (1.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u\right) = 0$$

называют элиптическим по аналогии с уравнением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Такой тип уравнения можно встретить в задачах электромагнетизма, например при решении задач, содержащих уравнения Лапласа, Пуассона или Гельмгольца. Эти уравнения содержат вторую (иногда также и первую) производную векторного магнитного потенциала, описывающего распределение физической величины относительно пространственных координат. Значение этой величины (скалярно или векторно) представляется или независимой от времени, или чисто гармонической, например, как в уравнении

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z, \tag{1.3}$$

которое является уравнением Пуассона в частных производных для векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}$ (с одной ненулевой компонентой A_z) при плотности тока $\mathbf{J}$ (также с одной составляющей J_z) и магнитной проницаемости среды μ . Если приравнять к нулю правую часть уравнения (1.3), получим уравнение Лапласа. Часто в задачах применяют уравнения Гельмгольца в виде

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{A}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{A}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{A}}}{\partial z^2} + j \cdot \mu\omega\gamma\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{0},$$

где $\underline{\mathbf{A}}$ – фазор векторного магнитного потенциала; j – мнимая единица; ω – угловая частота; γ – электропроводность; $\mathbf{0}$ – нулевая векторная матрица.

- Параболические уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + F(x, t, u) = 0$$

подобны уравнению параболы, которое в декартовой системе координат записывается в виде $y^2 = 2px + c$. Примером такого типа уравнений может быть уравнение

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} = \mu\gamma\frac{\partial H_z}{\partial t},$$

описывающее временную вариацию аксиальной компоненты магнитной напряженности H_z в осесимметричной бесконечно длинной области.

Параболические уравнения включают в себя не только вторую (иногда первую) пространственную производную, а также первую производную по времени.

- Гиперболические уравнения записывают как [14]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F(x, t, u) = 0 \tag{1.4}$$

по аналогии с уравнением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

где a и b – коэффициенты уравнения гиперболы.

Примером гиперболического дифференциального уравнения может служить уравнение, описывающее колебательные процессы при распространении электромагнитного поля в пространстве [13],

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_1\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_2\frac{\partial u}{\partial y}\right) - qu + F\left(x, y, t, u\right), \tag{1.5}$$

где K_1иK_{21}, ρ, q – произвольные коэффициенты дифференциального уравнения.

Принципиальным отличием уравнения этого вида от остальных является наличие второй производной (иногда и первой) как по пространственным координатам, так и по времени.

В других типах уравнений в частных производных, в ряде случаев используются цепные модели при исследовании, например, однослойной

катушки с продольной и поперечной емкостями, а также бигармоническое уравнение, описывающее различные задачи конструкционной механики.

Дифференциальные уравнения, выражаемые через производные, в которых более чем одна независимая переменная, называют дифференциальными уравнениями в частных производных ЧДУ. Производные в ОДУ выражаются с помощью символа «d», в то время как ЧДУ выражаются через другой символ – «∂».

Во многих случаях ЧДУ не могут быть решены с помощью аналитических методов, чтобы получить значения зависимых переменных в различные моменты времени и различных точках пространства. Например, очень сложно или невозможно получить решение в аналитических выражениях (с помощью алгебраических уравнений), таких как

$$T = f(t, x),$$

из уравнений (1.5) или (1.4). Альтернативным вариантом аналитического решения ЧДУ является приближенное численное решение. МКЭ можно считать точным методом численного решения ЧДУ.

1.2. Краткое математическое описание метода конечных элементов с помощью принципа минимума мощности. Минимизация функционала

Исторически принято называть методом конечных элементов вариационно-разностные методы (Ритца) и проекционно-разностные (Бубнова – Галеркина), реализованные методами вариационного исчисления. Однако стоит понимать, что существуют другие модификации метода конечных элементов, такие как метод наименьших квадратов, метод коллокаций, метод наименьших моментов и т. д. [15, 16].

Для понимания основных математических принципов, которые лежат в методе конечных элементов, удобно рассмотреть принцип минимизации энергии. Известно из физики [17, 14], что равновесная система в любой момент времени находится в таком состоянии, которое соответствует минимуму энергии. Аналогичный принцип лежит в вариационных задачах

математики, когда решение дифференциального уравнения находят с помощью минимизации или максимизации соответствующего функционала для данного дифференциального уравнения [18].

Вариационным исчислением называют раздел математики, в котором из неизвестных функций, входящих в подынтегральное выражение некоторого интеграла, выбирается такая функция, при которой этот интеграл достигает своего максимального или минимального значения [18]. Рассмотрим это на примере уравнения Пуассона для магнитного поля (1.6), которое описывается векторным магнитным потенциалом $\mathbf{A}$, содержащим только продольную компоненты векторного магнитного потенциала A и плотности тока $\mathbf{J}$,

$$\Delta A = -\mu_0 J. \tag{1.6}$$

Вариационной задачей, эквивалентной процедуре решения уравнения Пуассона, в данном случае оказывается минимизация связанного с энергией функционала $F(u)$ по поверхности S на рассматриваемую область пространства [17]

$$F(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dS - \mu_0 \int uJdS. \tag{1.7}$$

Скажем, что функционал (1.7) достигает минимума при $u = A$ – истинном решении уравнения (1.6). Допустим, что $u = A + \theta\upsilon$, причем υ – некоторая дифференцируемая функция, которая обращается в нуль во всех граничных точках, где A задано; θ – числовой параметр, тогда легко доказать, что функционал (1.7) имеет минимум [17].

Функция u может быть аппроксимирована с помощью функции при использовании линейной комбинации базисных функций (кусочно-линейных) согласно следующему уравнению [11]:

$$\begin{gathered} u \approx u_h, \\ u_h = \sum_i u_i \Psi_i, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где Ψ_i обозначает базисную функцию, а u_i – коэффициенты функции, которая аппроксимирует u с помощью u_h .

Рис. 1.2 демонстрирует принцип минимизации энергии и вариационный принцип для одномерной задачи. Линейная базисная функция имеет

значение 1 на соответствующих своему индексу узлах и 0 на всех других узлах. На рис. 1.2, *а* показано 7 элементов вдоль оси x, где функция u определена. Одним из достоинств использования МКЭ является то, что он предполагает большую свободу в дискретизации элементов, которые могут быть использованы при разбиении пространства, и базисных функций. На рис. 1.2, *а* представлено равномерное распределение шага дискретизации, хотя это может быть сделано иначе: расчетную область можно разбивать неравномерно, как показано на рис. 1.2, *б*, на котором в отдельных областях градиент какой-либо функции (например температуры в задаче термодинамики) больше, чем в других. Это позволит увеличить точность описания аппроксимируемой функции.

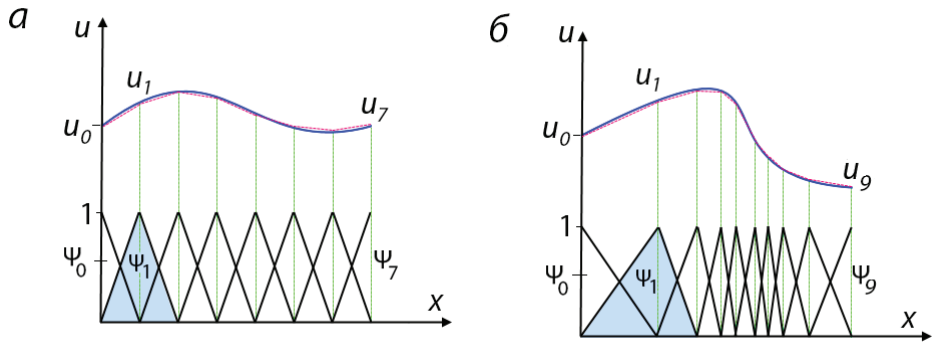


Рис. 1.2. Функция u, аппроксимируемая с помощью u_h, являющаяся комбинацией базисных функций Ψ_i, (*а*), и неравномерная дискретизация (*б*) [12]

Оба этих примера показывают, что выбор линейной базисной функции имеет очень ограниченные возможности (функция отлична от нуля лишь в ограниченном интервале). Однако стоит отметить, что в зависимости от решаемой задачи могут быть выбраны другие функции вместо линейного полинома, например высших порядков или полиномы Чебышева и др. [16]. При описании физических процессов по двум пространственным координатам, в большинстве случаев используют триангуляцию, представляющую собой разбиение расчетной области на подобласти треугольной формы, тогда искомая функция u будет аппроксимирована

как

$$u = a + bx + cy. \tag{1.9}$$

Таким образом истинное решение заменяется кусочно-планарной функцией. Данная аппроксимация дает линейное описание между тремя вершинами треугольника (конечного элемента). Можно использовать другие типы полиномов, что позволит использовать нелинейную аппроксимацию между вершинами. Коэффициенты a, b, c в уравнении (1.9) могут быть найдены из системы трех неизвестных уравнений в соответствии с утверждением, что значения функции в вершинах треугольника равны u_1, u_2, u_3, тогда можно записать

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

В общем виде уравнение (1.8) можно записать как

$$u = \sum_{i}^{3} u_i \Psi_i \left(x, y\right),$$

тогда один из членов функционала (1.7) можно представить в виде

$$\frac{1}{2}\int \left|\nabla u\right|^2 dS = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_i u_j \int \left(\nabla \psi_i\right)\left(\nabla \psi_j\right) dS,$$

а другой член функционала (1.7) выразить как

$$\int uJdS = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_i J_j \int \Psi_i \Psi_j dS,$$

в котором по аналогии с функцией u раскладывается плотность тока J. Затем можно записать общий функционал (1.7) в виде

$$F(u) = \frac{1}{2}\mathbf{u}_d^T S_d \mathbf{u}_d - \mu_0 \mathbf{u}_d^T T_d \mathbf{J}_d,$$

где $\mathbf{u}_d$ – вектор-столбец значений функции в вершинах треугольника.

Для упрощения записи принимают $S_d = \int (\nabla \psi_i)(\nabla \psi_j)\, dS$ и $T_d = \int \psi_i \psi_j dS$, где T обозначает операцию трансформации матрицы.

В таком случае для всей исследуемой области функционал запишем

$$F(u) = \frac{1}{2} u^T S u - \mu_0 u^T C^T T_d J_d.$$

Здесь $S = C^T S_d C$, а $u_d = C u_c$ описывает разъединенные u_d и объеденные u_c элементы как критерий равенства значений в вершинах соседних объеденных треугольниках.

Минимизация $F(u)$ по всем варьируемым узловым потенциалам приводит к системе уравнений [17]

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u_k} = 0,$$

матричная форма которой имеет вид

$$S^{'} A = \mu_0 C^T T_d J_d.$$

Решение данной системы уравнений является искомым решением распределения функции u при помощи метода конечных элементов.

Глава 2.

Интерфейс Comsol Multiphysics

Интерфейс Comsol Multiphysics, начиная с версии 5.2, достаточно интерактивный и понятный, но отсутствие русской версии и небольшое количество пособий и учебников на русском языке ограничивает доступ начинающим пользователям к данной программе. Поэтому целесообразно начать с рассмотрения основных инструментов пользователя, присутствующих в интерфейсе программы.

Запуск программы Comsol Multiphysics сопровождается выводом окна (рис. 2.1, *а*). Вкладка ***Model Wizard*** (мастер модели) создает шаблонную модель, в которой пользователю предлагается пошагово выбрать нужный набор компонентов для создания работоспособной модели, другими словами, настроить или описать математическую модель. Вкладка ***Blank Model*** отвечает за создание пустого дерева модели; как правило, продвинутые пользователи применяют ее для более сложных задач. В данном пособии предлагается создавать модели при помощи наиболее простого способа ***Model Wizard***.

Следующий шаг после выбора вкладки мастера модели – определение размерности задачи (рис. 2.1, *б*). Comsol на данный момент позволяет решать задачи шести типов размерности пространства: ***0D*** (трехмерный), ***2D axisymmetric*** (двумерный осесимметричный), ***2D*** (двумерный), ***1D axisymmetric*** (одномерный осесимметричный), ***1D*** (одномерный) или ***0D***.

Стоит отметить, что выбор размерности задачи повлияет на описание решаемых уравнений, а также на ряд функций модели. Трехмерные

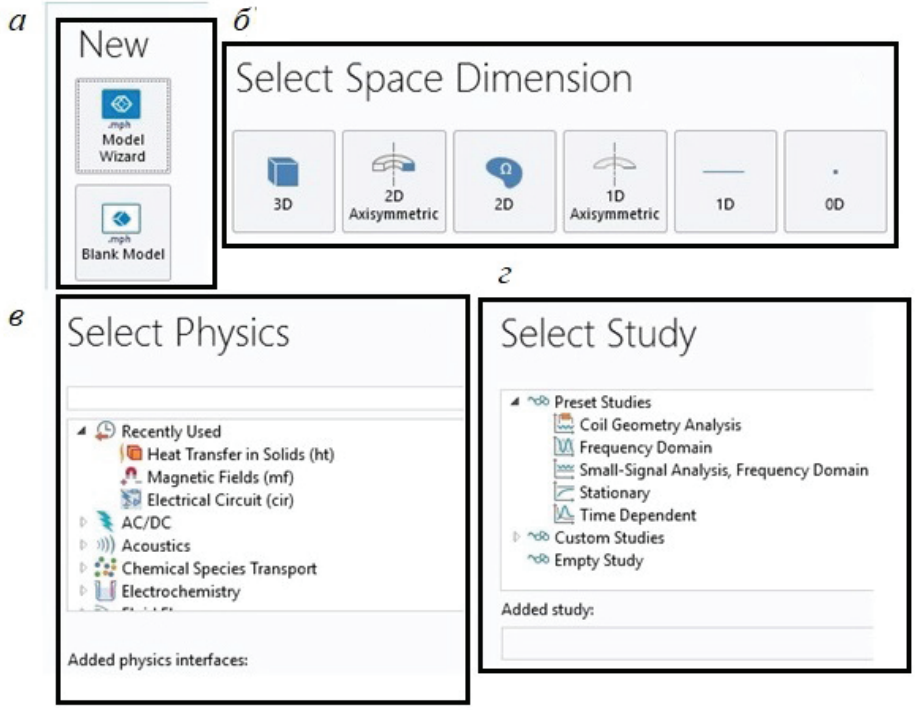


Рис. 2.1. Начальные стадии создания модели в Comsol Multiphysics

и двумерные модели хорошо известны практически любому пользователю, кто сталкивался когда-либо с расчетами полей. ***2D axisymmetric*** задача представляет собой расчет распределения независимых переменных в цилиндрических координатах. ***1D axisymmetric*** задача аналогична ***2D axisymmetric*** , только с допущением, что длина исследуемой области бесконечного размера. ***1D*** называют поиском распределения искомой величины в зависимости только от одной пространственной координаты. Безразмерное (или ***0D***) представление подразумевает отсутствие каких-либо пространственных переменных, т.е. решение алгебраических уравнений, не зависящих от координат пространства.

После выбора размерности пространства модели программа, Comsol предоставляет выбор физики задачи (см. рис. 2.1, *в*). Физика задачи (*Physics*) характеризует основные математические уравнения, которыми описывается модель и проводятся решения. Существует возможность ис-

пользовать несколько различных физических интерфейсов в одной модели в процессе решения междисциплинарной задачи, например индукционный нагрев или электромагнитное перемешивание жидкого металла. Более подробно описание возможностей физических интерфейсов будет рассмотрено в гл. 7.

Последней настройкой мастера модели является выбор типа исследования (см. рис. 2.1, *г*). Тип исследования ***Study***, или тип задачи, влияет на вид уравнения, которое описывает тот или иной физический интерфейс. Для понимания работы с математическим моделированием и программой Comsol можно привести пример электромагнитного расчета. Уравнения Максвелла можно представить с членом, содержащим производную по времени. Данный тип задач обычно называется динамическим, или без производной по времени. Можно сказать, что это стационарная задача (гл. 9).

После прохождения всех стадий мастера модели, Comsol Multiphysics создаст базовую модель, содержащую основной минимальный набор компонентов для ее функционирования. В основном рабочем окне (рис. 2.2) будет происходить большая часть моделирования. Вкратце охарактеризуем каждую область рабочего окна и дадим трактовку, для чего она необходима.

Среда разработки приложений (***Application Builder***) предназначена для создания готового приложения-модели. Обычно приложение создают для пользователей, не имеющих навыка владения данным пакетом, в целях расчета каких-либо физических процессов, характеристик, т. д. Например, можно создать приложение, которое будет рассчитывать индуктивность индуктора, но для этого пользователю не придется каждый раз создавать геометрию, сетку и т. д., нужно будет задать лишь основные параметры, заложенные разработчиком конкретно этого приложения.

Панель инструментов главным образом содержит дерево модели, которое является основным компонентом модели, а также дополнительные кнопки визуализации ряда опций программы (рис. 2.2, черная рамка). Особое внимание стоит уделить настройке отображения ***Show***. Данная опция позволяет скрывать или отображать ряд опций в модели. ***Equation section*** отображает в окне настроек уравнение, которое описывает узел физики для каждого типа исследования (рис. 2.3, красная рамка). ***Equation view*** показывает все переменные и их зависимости

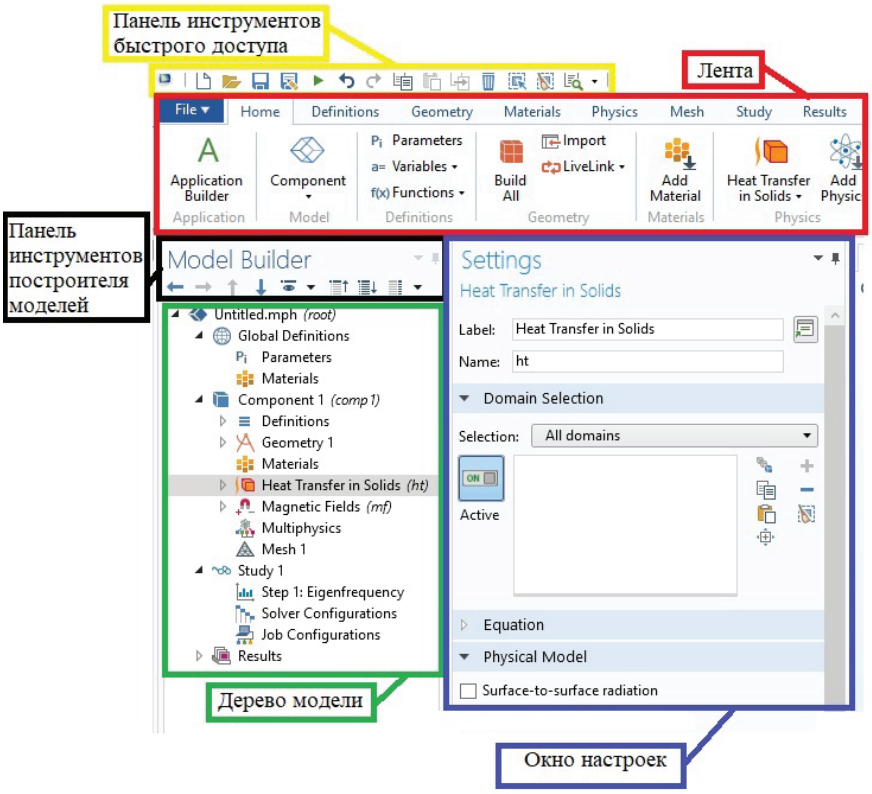


Рис. 2.2. Основное рабочее окно Comsol

для каждого физического узла (рис. 2.3, зеленая рамка). Возможна корректировка описания переменных. ***Discretization*** отображает тип аппроксимации конечных элементов. ***Advanced Physics***, ***Study***, ***Results Option*** позволяют добавлять ряд опций в каждый из разделов, которые по умолчанию выключены, например самостоятельно добавлять узел слабой формулировки уравнений или настройку распараллеленного решателя.

Лента (см. рис. 2.2) предназначена для быстрой настройки основных узлов дерева модели, а также содержит помимо данных вкладок кнопку ***Home*** (см. рис. 2.2). Закладка ***Home*** включает самые распространенные в использовании функции из всех семи компонентов, она предна-

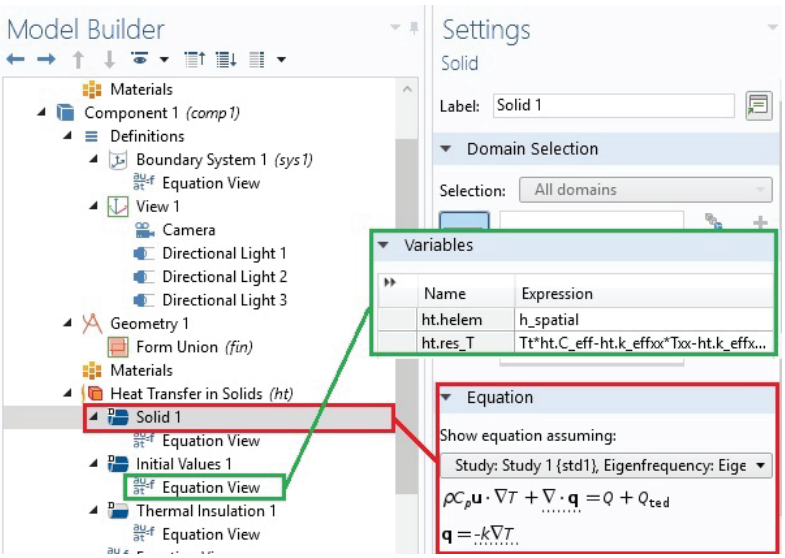


Рис. 2.3. Отображение **Equation Section**

значена для быстрого выбора необходимой опции. В окне настроек отображаются настройки каждого из узлов дерева модели. Дерево модели определяет связь между различными блоками, создает целостность и содержит всю заложенную информацию модели. Дерево модели содержит родительские узлы, так называемые компоненты высшего уровня. Все узлы в дереве модели по умолчанию являются родительскими узлами верхнего уровня. Предусмотрена возможность добавить дочерний узел, нажав на родительский узел правой клавишей кнопки и выбрав узел из предложенного списка.

Comsol Multiphysics обладает очень большим функционалом. Иногда нужно получить быструю информацию о назначении какого-либо узла модели, что возможно осуществить, нажав правую клавишу мыши на узел, о котором необходима справка, во всплывающем окне выбрав строку ***Help***, или выделить узел и нажать кнопку <F1> на клавиатуре. По нажатию правой клавиши мыши на любой узел модели появится следующее контекстное меню (рис. 2.4, *а*). Кнопка ***Disable*** служит для отключения выбранного узла в дереве модели. Это означает, что он будет отображен в дереве модели (только серым цветом – рис 2.4, *б*), но не будет функционировать. Обратное включение отключенного узла воз-

можно, если нажать на него правой кнопкой мыши и выборать кнопку ***Enable***. Узел модели можно удалить с помощью кнопки ***Delete***. Создание идентичного узла осуществляется с помощью кнопки ***Duplicate***. В некоторых случаях необходимо скопировать какой-либо узел и вставить его в другую часть модели. Такие манипуляции можно провести, выбрав в контекстном меню (рис. 2.4, *а*) строчку ***Copy*** и нажав правой кнопкой мыши на родительском узле, в который требуется вставить узел с помощью кнопки ***Paste***.

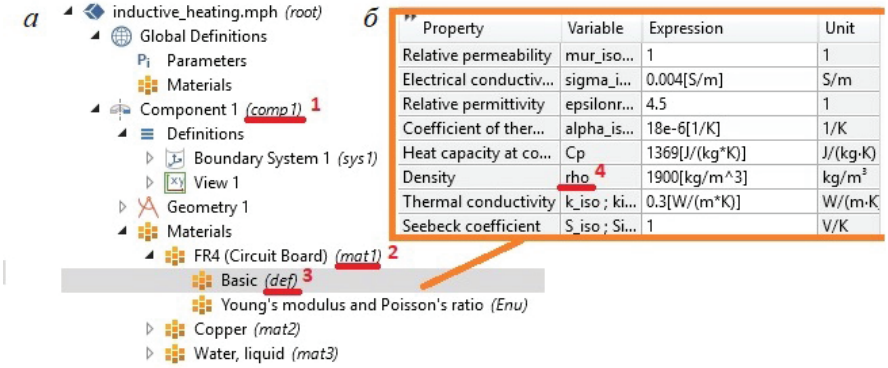


Рис. 2.4. Контекстное меню узла (*а*) и отображение отключенного узла в дереве модели (*б*)

Рассмотрим функционал каждого родительского узла и охарактеризуем основные дочерние узлы.

Model Builder имеет главный корневой узел (Root) – это имя модели, или «*mph*» файла. В корневом узле указывается основная информация о пользователе, основные единицы измерения и другая информация. Узел ***Global Definitions*** (глобальные определения) не имеет информативного характера, но он имеет подузлы. Дочерние узлы косвенно влияют на процедуру моделирования, например, в данном узле можно глобально задавать параметры, функции, переменные, материалы для нескольких ***Component*** (компонентов) модели. Блок ***Component*** также является дочерним узлом глобального определения. Узел ***Results*** (результаты) – постобработка полученных результатов. Он имеет широкий арсенал визуализации, оформления и хранения полученных данных в процессе решения модели.

Помимо описанных выше трех родительских узлов можно добавить еще два узла высшего уровня – это узлы ***Component*** (компонента) и ***Study*** (исследование). Данные узлы добавляются автоматически, если пользоваться мастером модели после того, как определили размерность, физику и тип исследования модели. Данные узлы можно дублировать. Создание нескольких ***Component*** позволяет с помощью связи создавать сложные модели. Дополнительные узлы ***Study*** позволяют одинаковую модель применять для разных режимов (стационарный, динамический, режим малых сигналов и т. д.). Узел ***Component*** имеет пять подчиненных узлов: ***Definitions*** (определение), ***Geometry*** (геометрия), ***Materials*** (материалы), ***Physics*** (физика), ***Mesh*** (сетка). Каждый из этих подчиненных узлов имеет ключевое место в структуре модели, которая не будет работоспособной без любого этого узла. Дальше более детально остановимся на рассмотрении каждого из этих подузлов.

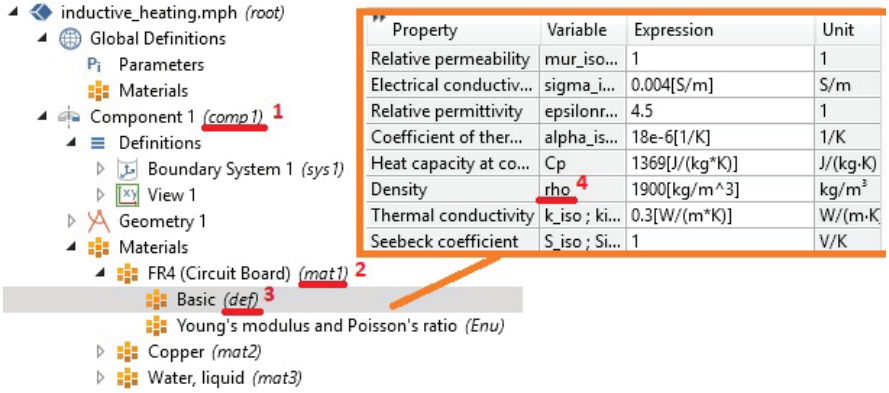


Рис. 2.5. Пример иерархии узлов модели

Такая структура, как описана выше, и реализация моделей позволяет удобно получать доступ к любой информации из любого узла. Один из способов сделать это – прописать ссылку на требуемое значение или переменную. Доступ по ссылке может осуществляться даже к родительским узлам из дочерних при правильном описании.

Каждый узел в модели имеет свое название (*Name*), которое отражено в дереве модели, в скобках, или настройках узла. При оформлении ссылки необходимо спускаться по иерархии узлов, отделяя их точками. Приведем пример, когда необходимо сослаться на физическое свойство

плотности в локальных переменных (см. рис. 2.5), тогда в переменных эту плотность можно записать как «*comp1.mat1.def.rho*», где *comp1* — это название компоненты; *mat1* — ссылка на материал, в котором есть подузел со значениями под названиями «*def*», и в этом подузле содержится переменная плотности *rho*. Приведем еще один пример передачи значений из одной компоненты в другую (рис. 2.6). Ссылка на температуру (черная стрелочка) выглядит как «*comp1.ht.T*», а на магнитную индукцию по x компоненте – «*comp2.mf.Bx*». Если переменная глобальная или глобальная на данном уровне (иногда говорят «определена в родительском узле») на нее можно ссылаться без указания пути, написав сразу ее название.

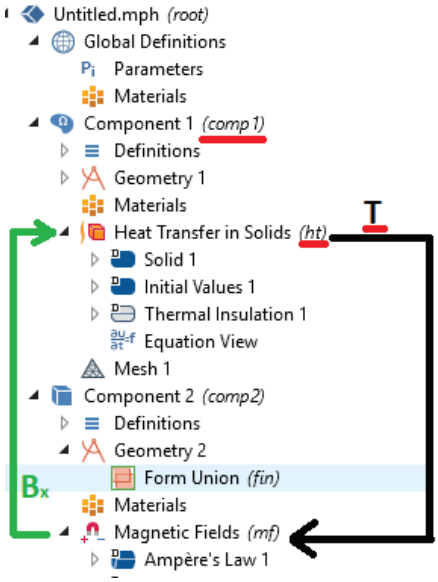


Рис. 2.6. Пример иерархии узлов с разными компонентами

Глава 3.

Инструменты предварительной и вспомогательной обработки модели. Узлы *Definitions* и *Global Parameters*

В данной главе излагается информация о глобальных и локальных подузлах определения (***Definitions***). Смысл такого объединения заключается в сокращении излагаемой информации ввиду однообразия функционала и понятий. Отличие подузлов заключается в уровнях управления. Глобальные определения имеют возможность воздействовать на все компоненты модели, а локальные – только на компоненты на собственном уровне. Возможно использовать локальные подузлы за пределами компоненты. Для этого служит «точечная нотация», в которой перед именем переменной через точку указывается имя узла *Component*, где она объявлена [11]. Другими словами, если, например, определили какую-либо область геометрии и назвали ее «*Explicit 1*», то к ней можно обратиться через команду *Comp1.Explicit1* в других нелокальных областях. Более подробно о ссылках в моделях упоминалось в конце гл. 2.

3.1. Назначение узла *Definitions*

Любые физические задачи имеют начальные условия, которые необходимо представлять. Узел ***Definitions*** является вспомогательным инструментом задания начальных условий. Постоянные значения геометрии, свойства материала или какие-либо коэффициенты могут быть определены в ***Global Definitions***. Помимо постоянных величин есть возможность задавать собственные переменные или функции. Узел отвечает также за настройку графического окна, координатных осей. В некоторых случаях удобно подгружать в узел ***Definitions*** внешние функции: для сравнения в постобработке или использования для начальных условий. Полный спектр возможностей узла ***Definitions*** зависит от изобретательности пользователя.

3.2. Структура узла *Definitions*

На вкладке ***Definitions*** (рис. 3.1) представлен ряд опций, которые способны облегчить дальнейшую работу с моделью. Вызов этих операций возможен в результате нажатия правой клавиши по узлу ***Definitions*** дерева модели. Рассмотрим классификацию во вкладке ***Definitions***:

- ***Variables*** (переменные) – предназначена для задания одной или нескольких значений модели. Переменные задаются в виде зависимостей от различных параметров, функций и самих переменных (время, координаты и т. д.);

- ***Function*** (функции) – позволяет задавать ряд функций различными способами (аналитически, путем интерполяции, случайно и т. д.). Удобно использовать для формирования сигналов, задания функционального изменения физических свойств в материалах модели и в ряде других случаев;

- ***Selections*** – позволяет создавать совокупность блоков, присваивая ему имя для последующего обращения к цельному созданному объекту. Очень удобно использовать при индикации частей геометрии;

- ***Probes*** – этот инструмент позволяет отслеживать значение выбранной физической величины в указанной геометрии как во время решения, так и после. Отслеживаемые данные с помощью данного инструмента могу быть представлены в виде графиков или таблиц;

- ***Mass Properties*** – вспомогательный раздел, который позволяет рассчитывать объем, массу и центр масс геометрических объектов модели;

- ***Component Couplings and Coupling Operators*** – устанавливает связь между различными частями компоненты модели или компонентами модели. Связанные компоненты определяются с помощью связующих операторов. Оператор рассчитывается в выражении как его аргумент. Например, данные операций позволяют связать двухмерную сетку и перенести на трехмерный объект. Другое применение - определение интегральных величин на геометрии, на которые возможно будет в дальнейшем сослаться в модели;

- ***Coordinate Systems*** (координатная система) – способна создавать дополнительное множество координатных систем, а также области с бесконечными элементами. Множество систем удобно использовать в формировании физики, например при задании сложных контуров протекания каких-либо потоков. Благодаря бесконечным элементам, во многих задачах упрощается описание граничных условий. Бесконечные элементы применяются, как правило, на границах расчетной области для имитации «бесконечной» расчетной области с помощью функции формы (пространства). Такая функция формы бесконечного элемента может быть получена путем использования отображения для преобразования глобальной бесконечной области в локальную конечную область, в которой используется стандартная полиномиальная интерполяция [19];

- ***View*** (вид) – позволяет скрывать, убирать, разрезать представления объектов геометрии, сетки, а также полученных результатов. Упрощает работу с моделью, во многих случаях не представляется возможным без создания дополнительных видов в модели.

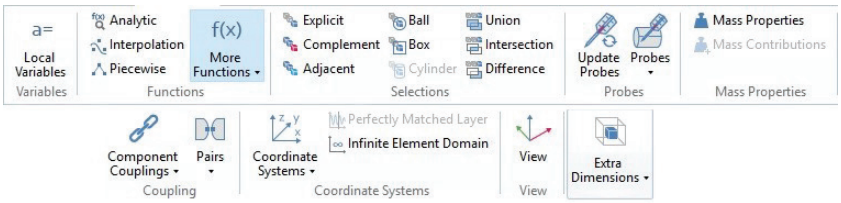


Рис. 3.1. Панель Definitions

Узел ***Global Definitions***поддерживает создание узлов ***Parameters***, ***Variables*** и ***Function***; как и описывалось выше, они идентичны локальным функциям и переменным. Блок ***Parameters***возможно создавать только в ***Global Definitions***. Узел ***Parameters*** содержит структуру (рис. 3.2), с помощью которой удобно описывать и при необходимости изменять входные данные модели. В поле ***Name*** записывается имя определяемого параметра. Поле ***Expression*** присваивает значение параметру с помощью чисел или алгебраических выражений. Сноски по указанным параметрам или вычислениям можно сделать в столбце ***Description***. Данную опцию программы удобно использовать для задания исходных известных величин модели, например размеров геометрии или физических характеристик. Во многих случаях значение заданных величин удобнее изменять именно в окне параметров, чем искать их в других блоках или узлах.

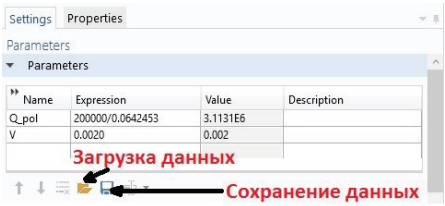


Рис. 3.2. Окно настройки опции ***Parameters***

Variables – переменные – могут быть созданы в узлах ***Global Definitions*** и ***Definitions*** . Создать данную настройку модели можно двумя способами. Первый способ – выбрать ***Variables*** во вкладках ***Home*** или ***Global Definitions*** для одного из компонентов модели. Второй способ – нажав правой кнопки мыши на узел, в который требуется добавить настройку переменных.

Столбец ***Name*** в окне настроек ***Variables*** (рис. 3.3) определяет название переменной. В поле ***Expression*** можно формировать выражение с помощью чисел, параметров, других переменных (координат, времени, решений модели и т.д.), различных физических и математических констант и т.д. Столбец ***Unit*** отображает единицы измерения переменных. Поля столбца ***Description*** предназначены для смыслового описания выражения переменных. ***Geometric Entity Selection*** позволяет ограничивать области применения переменных по геометрии. Например, заданы переменные по распределению магнитной проницаемости не для всей области геометрии, тогда в ***Geometric Entity Selection*** можно выбрать, на какой части области будут определены заданные переменные.

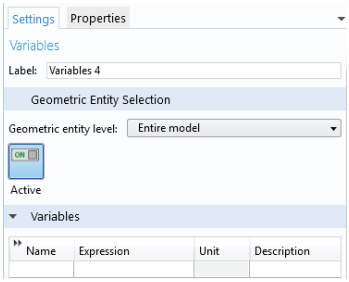


Рис. 3.3. Окно настроек ***Variables***

Стоит отметить, что возможно использовать переменные, которые вычисляются во время решения, и использовать их в модели. Также удобно применять переменные при решении обычных дифференциальных уравнений в Comsol. В программе Comsol существует возможность подгружать и выгружать переменные.

3.3. *Functions*

Создание собственных функций является одной из самых интересных возможностей Comsol. Множество физических процессов часто удобно описывать с помощью заранее известных функций. Поэтому необходимо уметь пользоваться блоком ***Function***. На рис. 3.4 показано многообразие существующих функций в Comsol Multiphysics. В данной части пособия описываются основные возможности использования функций.

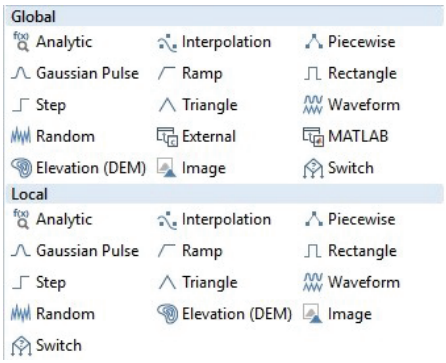


Рис. 3.4. Функции, используемые в Comsol Multiphysics 5.2a

В Comsol можно выделить три основные функции: ***Analytic***, ***Interpolation***, ***Piecewise***, а также ряд основных шаблонных функций. Под шаблонными функциями понимаются математические функции (cos, *abs*, sin и т. д., более подробно в разделе «Приложение (справочное)»). Кроме математических функций к шаблонным функциям относят ***Ramp***, ***Rectangle***, ***Gaussian Pulse***, ***Step***, ***Triangle***, ***Waveform***, ***Random***. Помимо выше перечисленных функций существуют внешние функции. Внешние функции можно описывать на языке ***C*** или ***Matlab***. Внешняя функция может быть только глобальной, т. е. применяется ко всей модели. Любая функция, используемая в Comsol, имеет поля ***Label*** и ***Function name***. ***Label*** отображает название функции в дереве модели. Иногда в моделях определяется большое количество функций, которые необходимо визуально быстро отличать. Для этих целей часто удобно использовать изменения названия в поле ***Label***. ***Function name*** задает символьное название функции, с помощью которого можно вызывать данную функцию в модели или ссылаться на нее.

Рассмотрим подробнее каждый вид функций, используемых в Comsol Multiphysics, за исключением внешних функций. Начнем изучение создания функций в Comsol с наиболее простых типов – шаблонных функций.

Ramp – функция с определенного значение аргумента линейно возрастает(убывает) до заданного значения (рис. 3.5, *а*). Окно настройки изображено на рис. 3.5, *б*. Вкладка ***Parameters*** определяет поведение функции. Значение поля ***Location*** задает точку по оси абсцисс, с которой происходит возрастание значений функции. Поле ***Slope*** характеризует,

какое значение примет функция при увеличении аргумента на единицу. В некоторых случаях необходимо, чтобы функция не превышала какого-то значения. С этой целью активируют настройку ***Cutoff*** и задают в данном поле значение, которое не должна принимать заданная функция.

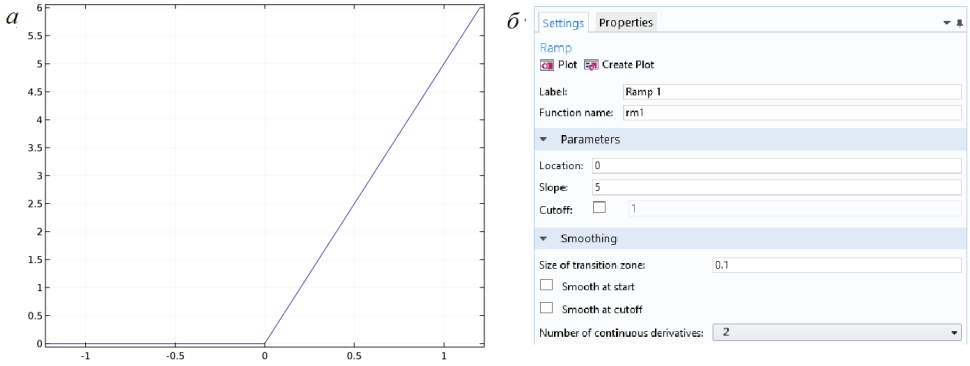


Рис. 3.5. График *(а)* и окно настроек *(б)* функции ***Ramp***

Rectangle и ***Triangle*** – импульсные функции. Первая функция имеет прямоугольную форму импульса (рис. 3.6, *а*), а вторая – треугольную форму импульса (рис. 3.6, *б*). Поля ***Lower limit*** и ***Upper limit*** задают крайние точки импульса в данных функциях.

Gaussian Pulse является обычной колоколообразной кривой (функция Гаусса), изображенной на рис.3.6, *в*, описываемой уравнением

$$y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (3.1)$$

Поле ***Location*** определяет значение x_0 в формуле (3.1), а ***Standard deviation*** задает стандартное отклонение, которое в формуле (3.1) обозначается σ.

Step – функция, которая резко переходит от одного заданного значения до некоторого другого заданного значения в определенной точке (рис. 3.7). Поле ***Location*** определяет значение абсцисс, при котором данная функция достигнет половины своего максимального значения. Настройки ***From*** и ***To*** задают верхний и нижний предел значения функции.

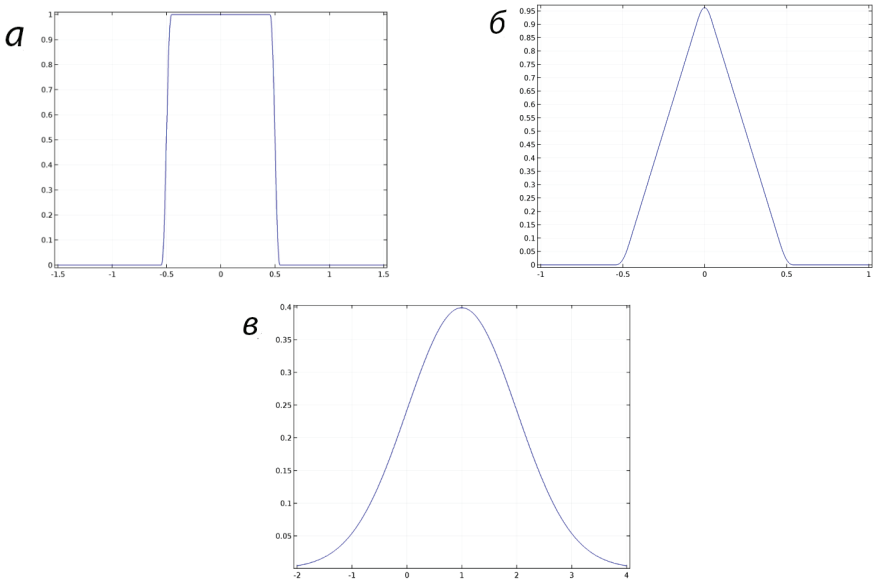


Рис. 3.6. Графики функций:
Rectangle (*а*), ***Triangle*** (*б*), ***Gaussian Pulse*** (*в*)

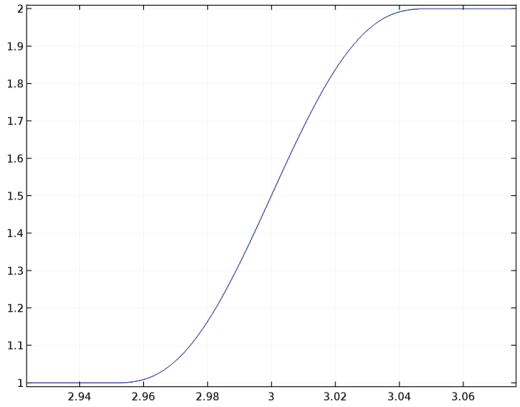


Рис. 3.7. График функции ***Step***

Random позволяет генерировать шумы в одно-, двух- и трехмерных пространствах с равномерным и нормальным распределением (рис. 3.8). Количество переменных определяется в настройках ***Number of arguments*** (значения от 1 до 3). Опция ***Distribution*** определяет тип

распределения функции. ***Mean*** – значение числа, которое равно половине суммы модулей максимального и минимального значения функции. ***Range*** – это интервал значений функции между ее максимальным и минимальным значениями. Графическая интерпретация настроек ***Mean*** и ***Range*** показана на рис. 3.8, *а*.

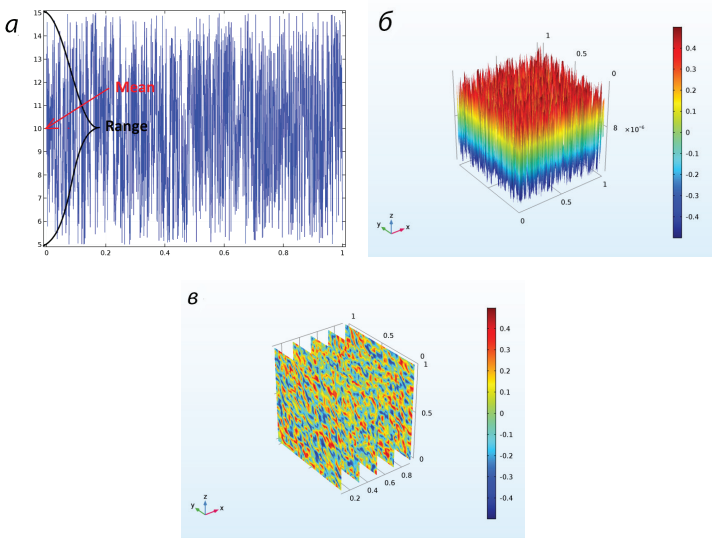


Рис. 3.8. Случайные одномерное (*а*), двухмерное (*б*), трехмерное (*в*) распределения

Waveform является периодической функцией с несколькими видами форм: *Sine* (синусоида), *Sawtooth* (пилообразная), *Square* (прямоугольная), *Triangle* (треугольная). Настройки всех форм содержат поля ***angular frequency*** (угловая частота), ***phase*** (фазовый сдвиг) и ***Amplitude*** (амплитудное значение функции). В ***Square*** и ***Triangle*** существует дополнительная настройка ***Duty cycle***, которая характеризует соотношение между длительностью импульса и периодом функции.

Analytic позволяет описать функции с помощью математических выражений. Окно настройки (*Settings*) узла ***Analytic*** содержит вкладки ***Definitions***, ***Periodic Extension***, ***Units***, ***Advanced***, ***Plot Parameters***. Во вкладке ***Definitions***, в поле ***Expression***, вводится математическое выражение функции. Математическое выражение может содержать шаб-

лонные функции или уже существующие функции с указанием ссылки на них. Поле ***Arguments*** характеризует переменные описанной функции. Если переменных несколько, то их записывают через запятую. Опция ***Derivatives*** позволяет определить автоматически (*Automatic*) частную производную аргумента. Данную опцию можно настраивать вручную (*Manual*). Ручная настройка состоит в том, чтобы отобразить производную функции от различных аргументов. Если производная не определена в данной точке, используется 0. ***Periodic Extension*** позволяет задавать периодичность функции с помощью включения опции ***Make periodic***. Настройки ***Lower limit*** и ***Upper limit*** позволяют задать частоту или период функции.

Interpolation определяет значение функции по заданным значениям в определенных точках. Интерполяционную функцию можно определить по данным из таблицы или файла. По умолчанию в окне ***Settings*** (рис. 3.9, *а*) источник данных (*Data Source*) определен как ***Local Table***. Данная настройка позволяет задать функцию с помощью таблицы. Также можно использовать внешние таблицы из узла *Results* с помощью изменения настройки в ***Data Source*** на ***Result Table***. Задание интерполяционных функций от нескольких переменных осуществляется путем воспроизводства данных из файла настройкой ***File*** в ***Data Source***.

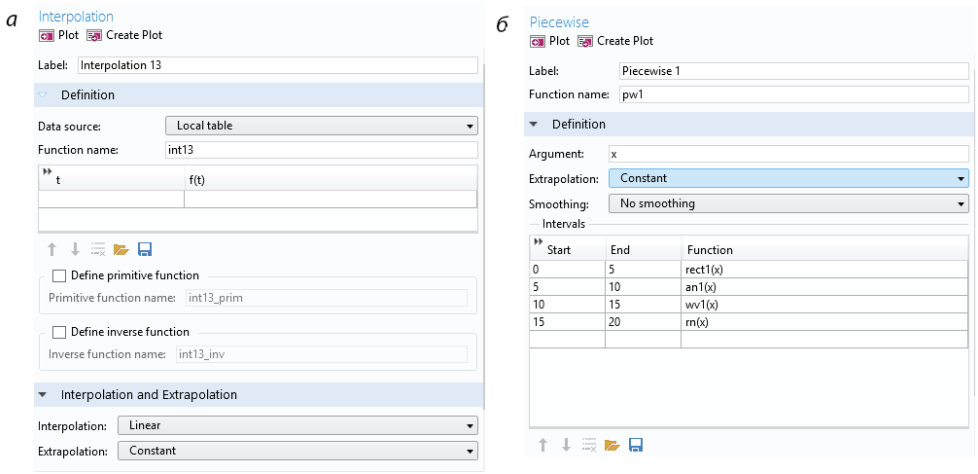


Рис. 3.9. Окна настроек функций *(а)* ***Interpolation*** и *(б)* ***Piecewise***

Piecewise позволяет создать функцию с помощью склейке нескольких заранее определенных кривых. Ее также называют кусочной функцией. Каждая функция, используемая в склейке, должна быть определена на собственном интервале, а именно: не должно быть пересечений составных функций и разрывов. Данная функция может быть определена только для одной переменной. Поле ***Argument*** определяет название используемой в функции переменной. Настройки ***Extrapolation*** и ***Smoothing*** определяют типы экстраполяции и сглаживания склеиваемых функций [11, 12]. Поле настройки ***ntervals*** состоит из таблицы с тремя столбцами. Первые два столбца отвечают за определение интервала, на котором будет существовать требуемая функция, описанная в третьем столбце. Пример приведен на рис. 3.9, *б*.

3.4. *Selection*

Explicit – функция, позволяющая создавать выборку геометрических объектов (объекты, области, поверхности, границы, точки) с возможностью последующего доступа к ним. Хорошим примером использования данной функции может служить процесс моделирования электродвигателя с большим количеством обмоток. При помощи опции ***Explicit*** можно один раз определить области, в которых будет протекать ток, например, фазы A. Следующие настройки модели как в предпроцессоре, так и постпроцессоре, не потребуют выделения вручную данных областей и позволят осуществить простой выбор геометрических подобластей, которые объединены общим свойством (принадлежностью к фазе A). В окне настроек (***Settings***) в ***Input Enmities*** (входные объекты) определяются геометрические объекты, которые будут входить в данную выборку. ***Output Entities*** (выходные объекты) определяет тип объектов, которые будут после выборки. Например, если мы определим для входных объектов несколько поверхностей, а на выходе укажем их границы, эта выборка будет определена как границы выбранных областей. Удобно использовать этот подход, когда необходимо выбрать множество составных геометрических объектов одного целого объекта.

Complement, ***Union***, ***Intersection***, ***Difference*** осуществляют логические (булевы) операции: инверсию, объединение, пересечение и вычитание соответственно. ***Complement*** создает выборку, в которую бу-

дут входить все элементы, кроме определенных в окне настроек ***Input Entities***, согласно выбранному типу геометрического объекта. ***Union*** создает выборку двух и более ранее определенных выборок их логическим сложением (объединением). ***Intersection*** создает выборку с областью пересечения двух и более ранее определенных выборок. ***Difference*** отвечает за создание выборки на основе логического вычитания.

Adjacent создает выборки различных типов объектов геометрии из уже существующих выборок, также может объединять выборки, настроенные в узле ***Geometry*** (например ***Explicit Selection*** или ***Adjacent Selection***. Данная опция похожа на ***Explicit***, только работает с выборками, а не с геометрическими областями.

Операция ***Ball/Disk*** определяет способ выделения объектов геометрии с помощью вспомогательного шара (для трехмерной геометрии) или круга (для двухмерной геометрии). На выборку, полученную с помощью данной команды, также можно будет ссылаться в модели. В окне настроек необходимо определить тип получаемой на выходе выборки (области, поверхности, границы) на вкладке ***Geometry Entity Level***. Вкладка ***Input Entities*** описывает тип объектов, которые будут включены в данную выборку. Указание в настройках опции ***All Entities*** означает, что все геометрические объекты, которые вписаны в круг (шар), будут включены в эту выборку, а опция ***From selection*** требует задания выборок, на основе которых будет принята выборка, определяемая этим узлом. И именно в эту выборку будут включены все выбранные выборки в опции *From selection* и попадающие в заданный круг (шар). Следующие две вкладки определяют центр окружности (*Ball (Disk) center*) и радиус окружности (*Ball (Disk) Radius*). Вкладка ***Output Entities*** задает условия включения объектов в выборку. ***Entity intersects ball (disk)*** – условие, определяющее включение всех объектов, при котором все объекты, которые пересекает шар (диск), будут входить в выборку. ***Entity inside ball*** – условие, определяющее включение всех объектов, которые находятся внутри шара. ***Some vertex inside ball*** включает в выборку объект, если у него хотя бы одна вершина расположена внутри шара (диска). ***All vertices inside ball*** включает объект в выборку, если все вершины данного объекта расположены внутри шара (диска). Аналогичными функциями обладают опции ***Box*** и ***Cylinder***. Изменяется только фигура, в которую должны быть заключены объекты для включения в выборку, а именно - квадрат (параллелепипед) и цилиндр.

3.5. *Probes*

Узел ***Probes*** предназначен для отслеживания скалярных величин в конкретном заданном типе объекта в зависимости от параметров решателя (времени, частоты и другого любого параметрического параметра) и строит одномерный график и таблицу данных в процессе решения модели по параметрам решателя. Все разновидности ***Probes*** представлены табл. 3.1 [11]. Проба создает также переменную, которая определена в указанном настройками узле области.

Таблица 1.1

Структурные схемы соединений

Тип	3D	2D	1D
Domain (область)			
Boundary (поверхность)			
Edge (ребро)		—	—
Domain point (точка на области)			—
Boundary Point (точка на поверхности)		—	—
Global Variable			

Настройка ***Probes*** описывает математическое действие над выражением, которое определено в строке *expression*, на области расчета данной пробы (во вкладке настроек узла ***Source Selection***). Программа предлагает следующие операции: *Average* – вычисление среднего значения заданной пробы в объеме (поверхности, ребре); *Maximum/Minimum* – вычисление максимального/(минимального) значения выражения в заданной области; *Integration* – расчет интегрального значения заданного выражения на выбранной области. Вкладка ***Integration Settings*** отвечает за процесс вычисления прописанного выражения. По умолчанию метод расчета предполагает интегрирование (*Integration*) с четвертым порядком (*Integration order*) по пространственным координатам (*Spatial*). Кнопка ***Update Probes*** на вкладке ***Definitions*** ленты позволяет пересчитать пробные выражения без пересчета самой модели.

3.6. *Mass Properties*

Mass Properties – опция, позволяющая рассчитать переменные, описывающие массу, объем, центр масс, момент инерции. Для этого необходимо в окне настроек выбрать области, для которых будут определены эти переменные. Во вкладке ***Density*** окна настроек необходимо задать плотность выбранных областей, а также относительно какого типа координат производить интегрирование. Плотность можно брать из физического интерфейса (***From physical interface***). Во вкладке ***Variables*** необходимо отметить требуемые переменные, которые будут определены и рассчитаны для данного узла. Последней настройкой является определение порядка интегрирования (*Integration Settings*). Узел ***Mass Contributions*** является подузлом ***Mass Properties*** и предназначен для переопределения плотностей одной из частей составной детали. Например, книжная полка состоит из железных и деревянных конструкций, которые обладают разной плотностью, что повлияет на расчет переменных центра масс, момента и т. д.

3.7. *Coupling*

General Extrusion является оператором отображения значения функции (переменной), которая определена в выбранной пользователем области, на любой другой существующей области пространства при условии соответствия размерности пространства. Данное выражение может быть рассчитано для любого другого объекта геометрии. В частности, когда место назначения имеет больший размер пространства, чем источник, оператор выполняет перенос (экструзию) значений. Приведем пример реализации данного оператора.

Допустим, нам необходимо рассчитать поле скоростей в канале, который откачивает металл из печи с помощью МГД-насоса. В активной области действия электромагнитных усилий насоса необходимо использовать более точные модели турбулентности, тогда как в самом канале, на достаточном расстоянии от активной зоны, можно использовать ламинарные модели турбулентности. Для этого можно перенести решения скорости из одной области (источника) на другую с помощью оператора ***General Extrusion***.

Еще одним полезным применением данного оператора является упрощение описания результатов. Когда необходимо отслеживать значение какой-либо величины в точке, которая изменяет свои координаты со временем, можно воспользоваться оператором ***General Extrusion***. С его помощью можно переносить значения из одной компоненты модели в другую.

Кратко охарактеризуем настройки узла ***General Extrusion***. В первую очередь выбираем источник (область, из которой будут браться значения) в настройках узла, на вкладке ***Source Selection***. Во вкладке ***Destination Map*** по каждой координате описывается закон переноса значений из источника в область назначения.

Linear Extrusion является частным случаем ***General Extrusion***. Оператор предназначен для отображения одного значения, которое определено в каком-либо из объектов геометрии (источнике), на другом объекте. Настройка данного оператора аналогична ***General Extrusion***. Только необходимо указать ***Source Vertices*** (точки источника) и ***Destination Vertices*** (точки назначения). Через эти точки (***Source Vertices***) будет построена плоскость (прямая или точки в зависимости от размерности объекта геометрии), значения которой будут отображены линейно на плоскости (прямая или точки в зависимости от типа размерности объекта геометрии) через точки, указанные в узле ***Destination Vertices***.

Boundary Similarity является оператором для отображения определенных выражений с одной поверхности на другую поверхность одинаковой формы. Необходимо выбрать на вкладке ***Source*** плоскость, из которой будут браться значения, затем на вкладке *Destination Boundary* идентичную поверхность.

Identity Mapping – это оператор, который отображает значение в выбранной области на любую другую область. Важно, чтобы область источника и назначения были идентичны, что подразумевает пространственное расположение и форму.

General Projection используется для отображения интегрированных значений на геометрические объекты с меньшей размерностью пространства. Если ***General Extrusion*** отображал значения источника на заданных объектах, то *General Projection* отображает интегральные значения. Настройки идентичны настройкам в ***General Extrusion***. ***Linear Projection*** имеет одинаковое значение оператора ***Linear Extrusion***, только отображает интегрированные значения.

Необходимо отметить, что вышеописанные операторы могут отображать любые вычисленные значения, которые определены на их области источника. Реализуется это как функция с переменной, требуемой для отображения, например *genext1(comp1.T)*.

Identity Boundary, ***Edge***, ***Point***, ***Pair*** служат для определения идентичных элементов геометрии, но входящих в разные объекты геометрии или разнесенных в пространстве. Эта настройка позволяет в физическом интерфейсе задавать граничные условия *Pairs*.

3.8. *Coordinate system*

Coordinate system (система координат) позволяет идентифицировать исследуемый объект в пространстве с помощью чисел. В Comsol по умолчанию используется декартова система координат для описания свойств материалов, физических явлений и т. д. В некоторых физических интерфейсах координаты конкретных областей определяются как множество пространственных систем. Изменение координатных осей для обособленных областей или для всей модели часто упрощает процесс моделирования, а в некоторых случаях является единственным вариантом корректного учета физических явлений. Координатную систему можно переопределить практически в любом из подузле физических интерфейсов модели (рис. 3.10). Можно выделить два типа координатных систем: абсолютные и относительные. Примером относительных систем координат может служить *Rotared System* – система координат, вращающаяся относительно глобальных координат.

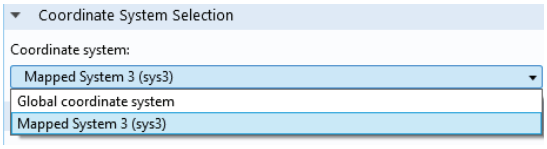


Рис. 3.10. Переопределение координатной системы

При использовании опции ***Base Vector System***, система координат раскладывается на базисные векторы. Данная система координат является относительной. ***Base Vector System*** не обязательно должна быть ортонормированной. Создание данной системы координат осуществляет-

ся с помощью таблиц, изображенных на рис. 3.11, *а*. В полях ***Coordinate names*** определяется название каждого базисного вектора. Таблица в поле ***Base vectors*** описывает расположение каждого базисного вектора в пространстве. Галочка на опции ***Assume orthonormal*** позволяет упростить создание ортонормальной системы векторов.

Boundary System является локальной базовой координатной системой на границах. Позволяет корректно задавать граничные условия, требующие нормаль к границе. В поле настройки ***Coordinate names*** задаются имена базовых векторов аналогично тому, как происходит в ***Base Vector System***, за исключением третьего вектора, который является, как правило, нормалью.

Mapped System предназначен для описания системы координат с помощью выражений. В ***Coordinate names*** задается название переменных координат, а ***Coordinate mapping*** математически описывает данный тип координат (рис. 3.11, *б*).

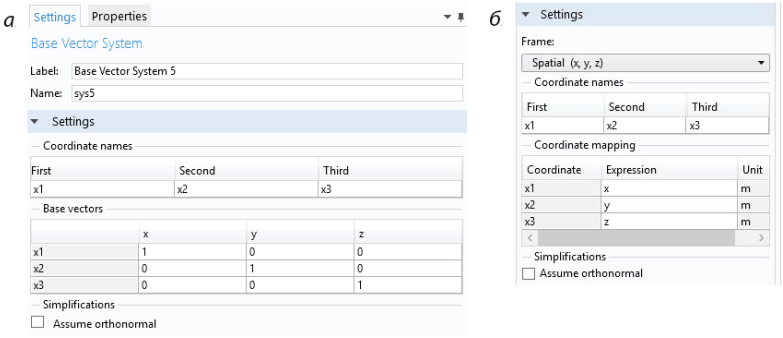


Рис. 3.11. Окно настроек узлов ***Base Vector System*** (*а*) и ***Mapped Coordinate*** (*б*)

Rotated System, ***Cylindrical System*** и ***Spherical System*** являются широко известными координатными системами, реализованными в пакете Comsol.

Узел ***Infinite Element Domain*** применяет на граничных областях систему координат, пересчитанную согласно размерам расчетной области. Цель этой математической операции – ослабить погрешность вычислений, связанную с граничными условиями.

3.9. *View*

Настройка ***View*** – настройка отображения графического окна. Основные настройки можно найти в верхнем меню графического окна (рис. 3.12): это приближение ( ), отдаление ( ) и приближение выделяемой области ( ) графического окна. Чтобы выровнять вид относительно выбранного объекта, необходимо выбрать этот объект и нажать кнопку ( ). Выравнивание относительно всей отображаемой геометрии осуществляется с помощью кнопки ( ). Кнопка ( ) позволяет переключаться между созданными видами. Кнопки xy yz zx позволяют отображать графическое окно относительно плоскостей, изображенных на них.

Зачастую в модели необходимо выбрать тот или иной тип геометрического объекта. Чтобы выбрать объекты геометрии, необходимо активировать ( ); для выбора областей – ( ); для поверхности – ( ); для граней – ( ); для точек – ( ). Отменить выделение каких-либо геометрических типов объекта позволяет кнопка ( ). Выбор «выделение в рамочку» осуществляется с помощью кнопки ***Select Box*** ( ); отмена выделения объектов, попавших в выделяемую рамку, осуществляется при помощи кнопки ***Deselect Box*** ( ). Выделить, отменить все выделенные объекты можно при помощи нажатия кнопки ( ) и ( ). Скрыть отображение элементов можно при помощи нажатия на кнопки ***Click*** и ***Hide*** и выбора объекта, который необходимо скрыть. Быстрое отображение скрытых элементов можно осуществить, если включить режим ***View Hidden Only*** ( ); обратный ему режим – ***View Unhidden only***( ). Существует возможность отобразить одновременно как скрытые элементы, так и нескрытые, при помощи режима ***View all*** ( ). Включение и отключение освещения геометрии осуществляется при помощи кнопки ( ), прозрачности – ( ) и показ только ребер геометрии – ( ).

Во многих случаях удобно в модели настраивать несколько видов, что позволит более комфортно работать с геометрией модели, результатами или настройкой узлов модели. Для этого необходимо в дереве модели,

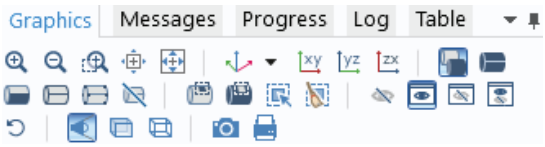


Рис. 3.12. Экспресс-настройки отображения графического окна

в узле *Definitions*, выбрать уже существующий вид (по умолчанию он называется *View 1*) и настраивать его, но также можно создать новый вид, нажав правую клавишу мыши (по узлу ***Definitions***) и выбрав ***View*** либо на вкладке ***Definition*** в ленте, выбрав ***View***.

Узел ***Definition*** позволяет настроить направление света, точку света, угол освещения и т.д. с помощью дополнительных подузлов. Но наиболее интересным является окно настроек самого узла ***View***. В окне ***Label*** можно переименовать название узла, которое будет отображаться в дереве модели и при выборе типа вида в графическом окне. Вкладка ***View*** позволяет настроить, как будет отображаться графическое окно. ***Wireframe rendering*** – отображение только граней геометрии. ***Show geometry label*** показывает в графическом окне название каждой компоненты геометрии, ***show edge direction arrows*** показывает вектор направления ребер, ***Show grid*** отображает сетку, ***Mesh rendering*** отображает сетку, ***Show axis orientation*** показавает ориентацию осей. Во вкладке ***Units*** можно отключить отображение единиц осей. Изменение шага сетки геометрии производится в настройках узла ***Camera***, на вкладке *Grid*. Скрыть различные типы геометрии можно с помощью узлов ***Hide for Geometry*** и ***Hide for Physics***. Добавить эти узлы можно, нажав правой клавишей мыши на узел ***View***. ***Hide for Geometry*** будет скрывать объекты только во время работы с узлом ***Geometry***: ***Hide for Physics*** скрывает объекты для всей модели, за исключением узла ***Geometry***.

Можно создавать несколько видов, что часто бывает необходимо для быстрого переключения в различные моменты работы с моделью. Переключение осуществляется с помощью кнопки ( ) на панели (рис. 3.12). Также вид можно использовать в настройках каких-либо типов графиков в узле ***Results***.

Глава 4.

Описание расчетной области модели. Узел *Geometry*

В данной главе рассматриваются основные возможности собственного конструктора геометрии Comsol Multiphysics, возможности импортировать или экспортировать готовые геометрии, влияние размеров геометрии на дальнейший анализ моделей и способы устранения узких мест. Основная часть главы будет касаться трехмерной геометрии, но большинство функций узла ***Geometry*** актуально и в других размерностях.

4.1. Назначение геометрии

Узел ***Geometry*** служит для создания определенных областей исследуемой модели с заданными размерами. Инструменты и операции узла ***Geometry*** предназначены для различных манипуляций над пространственным представлением исследуемого объекта, например, для отрисовки обмоток двигателя, построения магнитопровода с помощью экструзии его из заданного сечения или объединения различных элементов конструкции в единую сборку. Построенной геометрии будут присваиваться математические и физические свойства для описания процессов в исследовании. Стоит отметить, что способ представления исследуемого пространства (геометрии) будет напрямую влиять на удобство работы с моделью и получаемые результаты, поэтому исследователю стоит перво-

начально задать вопрос о возможности упрощения исследуемой области пространства, оценить, на какие физические явления сделанное упрощение может повлиять, а также стараться избежать больших диспропорций в геометрии, помня о том, что на основе этой построенной области пространства придется строить сетку.

4.2. Структура узла геометрии

Панель узла геометрии (рис. 4.1) для удобства работы разделена на функциональные блоки:

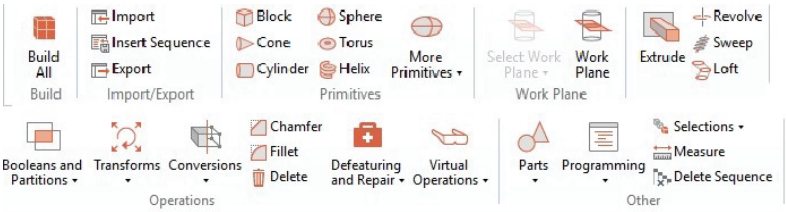


Рис. 4.1. Панель узла ***Geometry***

- ***Build*** – блок, содержащий кнопку ***Build All*** построения всех подузлов геометрии.
- ***Import/Export*** – блок, отвечающий за подгрузку геометрии (***Import***) из сторонних источников или других моделей Comsol (***Insert Sequence***). Программа предоставляет возможность сохранения геометрии (***Export***), созданной в конструкторе Comsol.
- ***Primitives*** – основные элементы, используемые для создания геометрии.
- ***Work Plane*** – блок создания и переключения между плоскостями.
- ***Operations*** – в этом блоке располагаются все главные операции над созданными геометрическими частями.
- ***Other*** – остальные действия от измерения построенных частей геометрии до создания геометрии с помощью логических операторов.

4.3. Блок *Primitives*

Основные типы фигур (табл. 4.1), реализованные в узле ***Geometry***, обладают рядом стандартных разделов по настройке при построении. Настройка ***Object type*** позволяет создавать элементы геометрии полыми (*Surface*) и сплошными (*Solid*). Раздел ***Size and Shape*** задает основные геометрические параметры элементов. Настройка ***Position*** определяет расположение выбранной части геометрии в пространстве. ***Axis*** определяет третью ось создаваемой геометрической фигуры, которая является высотой. Вокруг выбранной в разделе ***Axis*** оси, с помощью настроек ***Rotation angle*** происходит вращение фигуры на заданный угол. *Layers* – настройка, позволяющая разрезать область геометрии на части при помощи линий, определяемых в данном виде настроек.

Таблица 4.1

Типы элементов геометрии Comsol Multiphysics 5.2 [11]

Обозначение	Название элемента	Пространства	Обозначение	Название элемента	Пространство
	Конус	3D		Эллипс	2D
	Пирамида*	3D		Круг	2D
	Эллипсоид	3D		Квадрат	2D
	Тетраэдр*	3D		Четырехугольник	2D
	Шестигранник	3D		Многоугольник Безье**	2D,3D
	Тор	3D		Интерполяционная кривая**	2D,3D
	Цилиндр	3D		Многоугольник	2D,3D
	Эксцентричный конус	3D		Параметрическая поверхность	2D,3D
	Спираль	3D		Параметрическая кривая	2D,3D
	Блок	3D		Точка**	3D, 2D,1D
	Сфера	3D		Отрезок**	1D

$*$ Элементы, у которых отличие окна настроек от описанных выше основных типов фигур незначительно. Элементы, отмеченные в таблице ($*$), в окне настроек имеют основной блок *Vertices*. Данная настройка определяет форму и размер объекта с помощью задания координат его вершин.

$**$ Элементы, у которых окно настроек имеет значительные отличия.

Bezier polygon – кривая, состоящая из последовательности соединенных кривых различного типа. *Polygon Segments* – блок, отвечающий за создание последовательности кривых различных видов (*Liner* – линейный отрезок; *Quadratic* – полином второго порядка; *Cubic* – полином третьего порядка).

Interpolation curve – функция, образующая кривую с помощью интерполяции точек или векторов. *Data source* определяет источник данных, по которым будет определена интерполяция.

Функция ***Polygon*** – функция, образующая кривую с помощью интерполяции точек или векторов, создающая многоугольники.

4.4. Работа с плоскостями геометрии

Work Plane – удобный инструмент в создании объемной геометрии. Он позволяет создавать рабочие поверхности в трехмерном пространстве. Удобно использовать рабочие поверхности, когда необходимо изобразить геометрию в двухмерной области для дальнейших действий в трехмерном пространстве, например при вращении или выдавливании.

Plane definitions определяет вид задания поверхности. Comsol Multiphysics 5.2 предлагает ряд способов определения поверхности в пространстве. Изначально программа определяет задание поверхности типа ***Quick***. Тип ***Quick*** задает рабочую поверхность через координатные оси xy, yx, zx, xz, zy, yz. При данном типе определения поверхности можно сместить поверхность вдоль третьей координаты с помощью задания расстояния (***distance***) или точки, через которую пройдет поверхность (***through vertex***), в блоке ***Offset type***. Рабочую поверхность можно задавать параллельно любой поверхности (***Face parallel***) или прямой (***Edge Parallel***) геометрии. Расстояние от плоскости до выбранной поверхности или прямой определяется аналогичным образом, как в указанном выше способе, с возможностью изменять направления нормали. Реже используются способы построения поверхности через две точки (***Edge angle***), нормали дуги (***Circle perpendicular***), вершины (***Vertices***) и координаты пространства (***Coordinates***). ***Edge angle*** создает поверхность через две точки геометрии с возможностью вращения на заданный угол. В ***Circle perpendicular*** поверхность строится перпендикулярно началь-

ной, конечной или выбранной пользователем точке на дуге, заранее определенной. ***Vertices*** позволяет определять ***Work Plane*** через три вершины созданной геометрии.

Coordinates – координатный способ задания плоскости. Все способы, кроме координатного, имеют возможность изменять направление нормали поверхности. Также иногда удобно применять ***Transformed*** – тип плоскости, когда необходимо создать подобные рабочие поверхности с каким-либо изменением. ***Transformed*** позволяет создать собственную поверхность или подобную уже существующей и проводить манипуляции над ней (вращать, перемещать и т. д.).

Настройка ***Unit objects*** позволяет объединить созданные фрагменты рабочей области. Это удобно при дальнейшей работе в трехмерной области. ***Relative*** и ***absolute tolerance*** позволяют настроить относительную и абсолютную погрешность объединения фрагментов. Comsol Multiphysics автоматически определяет погрешность объединения.

После создания узла ***Work Plane*** появляется два подузла: *Plane Geometry* и *View*. Первый из них, ***Plane Geometry***, отвечает за создание геометрии на данной рабочей плоскости, а второй – ***View*** – за настройку вида и отображение рабочей плоскости.

4.5. Блок *Operations*

Большинство задач описывается сложной геометрией, которую невозможно создать с помощью простых объемных или плоских фигур. ***Operations*** (действия) над геометрией часто позволяют упростить процедуру создания геометрии или описать необходимую форму исследуемого объекта. В этой части пособия рассмотрим основные возможности операций.

Extrude – наиболее часто используемое действие над геометрией. ***Extrude*** выдавливает двухмерные объекты в заданном направлении. Разберем более подробно возможности данной операции.

Блок ***General*** в окне настроек отвечает за источник поверхности, которая будет выдавливаться. Данная настройка позволяет выбирать путем выдавливания между поверхностью геометрии (***Faces***) и рабочей поверхностью (***Work Plane***). Определение длины протяжки осуществляется в настройках ***Distance from Plane***. Флажок на *Reverse direction*

меняет направление выдавливания. ***Scales*** – настройка, отвечающая за масштабирование выходной грани по указанной оси. ***Displacement*** смещает конечную поверхность выдавливания на указанное расстояние по выбранной оси. ***Twist angles*** позволяет закручивать выдавливаемую геометрию за счет вращения конечной поверхности.

Revolve вращает выбранную поверхность вокруг выбранной оси, образуя объемную геометрию. ***General***, как и в операции ***Extrude***, определяет поверхность вращения. Настройка ***Revolution angel*** определяет углы вращения. ***Full revolution*** создает геометрию путем полного вращения двухмерной поверхности. С помощью функции ***Angles*** возможно самостоятельно определять начальный и конечный углы вращения. Настройка ***Revolution axis*** описывает ось, вдоль которой осуществляется вращение плоскости. ***Revolution axis*** содержит параметры ***Axis type***, ***Point on the revolution***, ***Direction of revolution axis***. ***Axis type*** характеризует вид оси, вокруг которой осуществляется вращение. Comsol Multiphysics предлагает использовать 2D ось (локальная ось рабочей поверхности) или 3D ось (глобальная геометрия). ***Point on the revolution*** описывает точку, вокруг которой происходит вращение. ***Direction of revolution axis*** задает вектор, направляющий ось вращения.

Операция ***Sweep*** – создание геометрии за счет протяжки плоскости вдоль заданной кривой. Блок ***Cross section*** окна настроек определяет поверхность протяжки. Галочка в поле *Create cross sectional faces* создает поверхности между протягиваемыми поверхностями. Удобно в дальнейшем создать сетку с помощью ***Sweep*** [11, 20, 21]. В разделе настроек ***Spine Curve*** определяется кривая, вдоль которой осуществляется протяжка и выбор направления (***Reverse direction***). Изменение ориентации в пространстве можно осуществить в окне настроек ***Motion of Cross section***. Настройка в данном разделе позволяет определить название поверхности (***Parameter name***), масштабирование протягиваемой поверхности относительно исходной (***Scale factor***), а также вращение (***Twist angle***).

Операция ***Loft*** – операция создания геометрии из сечений с помощью набора профилей. Окно настроек содержит раздел ***General***. В данном окне можно задать периодичность сечений (***Periodic loft***) в случае, если их начальные и конечные профили совпадают. ***Unite with input objects*** создает геометрию как единый блок. ***Object types*** определяет вид создаваемой геометрии (полая или сплошная). ***Profiles objects*** определяет

поверхность, объект, кривую или точку, которые будут сечением для результирующей геометрии. ***Start*** и ***End Profiles*** определяют начальные и конечные формы геометрии, с помощью которых будет задаваться направление создания сечений геометрии.

Для удобства работы с геометрией и в дальнейшем с моделью используют команды: ***Unit***, ***Intersection***, ***Difference*** и ***Compose***. ***Unit*** объединяет различные блоки геометрии. Его удобно применять при наличии одного объекта, состоящего из большого количества маленьких частей. ***Intersection*** создает объект пересечения двух выбранных блоков. Применять его целесообразно, когда необходимую геометрию удобно создавать путем пересечения двух или нескольких простых фигур. ***Difference*** образует геометрию вычитанием из одного блока другого. Геометрия, получаемая вычитанием, зависит от порядка произведения действий. ***Compose*** – операция, объединяющая все три вышеперечисленные действия над геометрией с помощью алгебраических выражений. Сложение – ***Unit***, вычитание – ***Difference***, умножение, или пересечение – ***Intersection***. Например, если из *block1(r1)* вычесть *block2(r2)* в поле, *expression* записывается в виде: $r1 - r2$. Данная операция способна осуществлять более сложные преобразования.

Удобной операцией для некоторых задач является разделение пересекаемых геометрий. Эти действия осуществляются в Comsol основными четырьмя функциями: ***Partition Objects***, ***Partition Domains***, ***Partitions Face***, ***Partitions Edge***. Способ разбиения геометрии тривиален. В окне настроек выбираем два объекта, области, поверхности – и на месте их пересечения образуется область геометрии. Удобно использовать данные операции, когда часть пересечения двух фигур геометрии в дальнейшем будет необходимо использовать.

Рассмотрим следующий блок ***Transform*** в рабочей панели ***Geometry***. Данный блок состоит из шести операций: ***Array***, ***Copy***, ***Mirror***, ***Rotate***, ***Scale***, ***Move***. Объединяет все эти операции изменение объектов геометрии в пространстве.

Array – создание массива геометрических объектов. Настройка данного узла осуществляется разделами ***Input***, ***Size***, ***Displacement***. ***Input*** определяет объект, из которого будет создаваться массив. Раздел ***Size*** определяет тип массива и количество дублируемых объектов по каждой из осей. ***Displacement*** определяет расстояние смещения между дублируемыми геометриями по каждой оси координат.

Copy – копирование существующих элементов геометрии в заданное место пространства с заданным шагом. Данная операция настраивается подобно операции ***Array***, отличие заключается в разделе *Displacement*, в котором задается шаг копирования и количество копируемых объектов с помощью функции *Range* по каждой из осей.

Mirror – зеркальное отображение объекта, позволяет изменить положение выбранной геометрии. Последовательность осуществления данной процедуры следующая. В разделе ***Input*** выбираем объект, который необходимо зеркально переместить. ***Point on Plane of Reflection*** задает фиксированную точку, относительно которой будет перенос; ***Normal vector to Plane of Reflection*** формирует вектор нормали, характеризующий направление сдвига.

Rotate – операция позволяет копировать объекты по окружности с заданным угловым шагом поворота. Настройка ***Input objects*** определяет объект копирования. В разделе ***Rotation Angle*** задается шаг угла копирования. ***Point of axis of rotation*** задает точку пространства, через которую будет проходить выбранная ось (***Axis type***), вокруг которой произойдет поворот объекта.

Move – операция позволяет копировать объекты в пространстве вдоль заданной прямой с заданным шагом по каждой оси. Настройка ***Input objects*** определяет объект, над которым будет производиться операция. ***Displacement*** определяет шаг между объектами по каждой оси.

Scale позволяет масштабировать объекты геометрии с выбранным смещением в пространстве. Раздел ***Input*** определяет объект, над которым будет производиться операция. ***Scale factor*** определяет тип и величину масштабирования. ***Isotropic scale factor*** масштабирует геометрию по всем направлениям с одинаковым коэффициентом. ***Anisotropic scale factor*** позволяет варьировать фактор масштабирования по координатным осям. ***Center of Scaling*** определяет точку, относительно которой будет осуществлено масштабирование.

Convert to Solid, ***Convert to Surface***, ***Convert to Curve***, ***Convert to Point***) – операции предназначены для объединения разных объектов, поверхностей, кривых геометрии в одну общую область, поверхность, кривую. Данные операции иногда удобно использовать, когда требуется описать составной объект, как целый. Например, проще нарисовать обмотку двигателя как составной объект, состоящий из нескольких частей (активных, лобовых), но в дальнейшем практичнее работать с моделью,

когда обмотка будет отображена, как цельный объект.

Chamfer и ***Filet*** – прямоугольная и круглая фаска. Удобная операция для формирования фасок на геометрии. В настройках ***Edges*** выбирается прямая, на которой будет образована фаска, а в разделе ***Radius*** задается размер фаски.

Некоторые задачи имеют сложную геометрию с мелкой прорисовкой элементов. Маленькие точки или элементы геометрии зачастую не позволяют построить сетку, так как заданная относительная погрешность распознавания элементов больше, чем данных элементов. Существует два способа обойти эту проблему. Первый заключается в понижении ***Default relative repair tolerance*** в окне ***Settings*** узла ***Geometry*** до необходимого значения. Второй путь – с помощью блока ***Virtual Operations*** избавиться от узких мест. ***Ignore Edges***, ***Faces***, ***Vertices*** позволяют выключать из модели выбранные грани, поверхности или вершины. Другая операция устранения узких мест заключается в слиянии соседних граней. Это реализуется в Comsol Multiphysics 5.2 с помощью операции ***Merge Edges*** и ***Merge Vertices***. В области настроек ***Edge (Vertices) to keep*** указывается кривая (вершина), которая остается неподвижной. ***Edge (Vertices) to remove*** – кривая (вершина), которая перестраивается на место неподвижной. ***Collapse edges*** и ***Collapse Faces*** – опции, позволяющие убрать из геометрии выбранную кривую или поверхность, тем самым геометрия перестроится на ближайшую кривую или вершину.

Виртуальные операции позволяют более гибко настраивать сетку с помощью вспомогательных геометрических объектов, которые будут отображаться (функционировать) только в узле ***Mesh***. Такими операциями являются ***Mesh Control Faces***, ***Edges***, ***Vertices***, ***Domain***. Для каждой из операций необходимо определить соответствующий объект геометрии, который в последующем не будет отображаться в модели, за исключением узла ***Mesh***. Другими словами, с помощью данных операций мы создает вспомогательные геометрические элементы для настройки сетки модели. Такой подход позволяет более гибко настраивать сетку и при этом не загромождать модель различными геометрическими построениями.

Удаление какого-либо типа геометрического объекта осуществляется с помощью операции ***Delete***, которая доступна в ленте на вкладке ***Geometry***. Другой способ удаления доступен при выборе ***Delete*** в дереве модели при нажатии правой кнопки мыши по узлу, который необходи-

мо удалить во всплывающем диалоге. Такой способ удаления не создает узла в дереве модели, а удаляет сам узел.

Некоторые задачи не требуют учета всех нюансов конструкций, а иногда даже не позволяют разрешить задачу. В данном случае целесообразно упростить геометрию с помощью удаления каких-либо их частей. Например, мелкие области, фаски или зазоры при состыковке сборки геометрии могут быть удалены с помощью опций *Defeaturing and Repair*. Блок узлов ***Delete Fillets***, ***Short Edges***, ***Sliver Faces***, ***Small Face***, ***Spikes***, ***Faces*** и ***Detach Faces*** – удаление скруглений, маленьких граней (отрезков), зазоров, поверхностей, выступов и отделение поверхности от объекта соответственно. Основной принцип работы данной функции заключается в поиске элементов объектов размером не больше заданного пользователем и последующем его удалении. Возможно упростить поиск маленьких областей, ребер и других элементов геометрии с помощью опции ***Repair***, которая ищет сразу все вышеперечисленные геометрические типы меньше заданного пользователем размера с последующим удалением. Область поиска также можно выбрать самостоятельно. Удобной опцией также в узле ***Defeaturing and Repair*** является ***Cap Face***. Опция имеет другое назначение, чем перечисленные выше операции из этого узла. Она создает поверхность по замкнутому контуру.

4.6. Блок *Other*

Measure позволяет посчитать размер выбранной области, поверхности или грани. При использовании опции ***Measure***, на объекты (*objects*) на дисплее выводится количество используемых поверхностей, граней и точек в данном объекте. Если необходимо посчитать габариты геометрии (объем, площадь, длину), необходимо выбирать области, поверхности, грани или точки. Расстояние между двумя точками также можно посчитать с помощью опции ***Measure***, выбрав две точки и нажав на кнопку ***Measure***.

Узел ***Selections*** обладает аналогичным функционалом, как было описано в части *Definition*, поэтому принцип работы с этими узлами в данной части не описывается. Но стоит указать, где удобно применять создание данных выборок. Если необходимо произвести какую-либо булеву операцию над геометрией (к примеру, ***Unit***, ***Intersection***, ***Difference***

и др.), это можно осуществить на основе геометрических выборок. Данный тип выборок может быть доступен в других узлах (кроме узла ***Geometry***), если в настройках этого узла поставить галочку ***Keep selection*** и выбрать ***On*** в диалоговом окне ***Show in physics***, иначе данный узел будет отображаться только для узла геометрии.

Можно встретить множество моделей с достаточно большим количество геометрических составляющих. Работа с такими объектами может существенно усложнить корректную настройку модели. Для решения этой проблемы, в Comsol реализована возможность разделения геометрических последовательностей на части с помощью опции *Parts* в ленте на вкладке ***Geometry***. Данная вкладка имеет 3 опции: ***Create Part***, ***Load Part***, ***Part Libraries***. ***Create Part*** создает глобальный узел геометрии с последующей возможностью ручной настройки геометрической последовательности или примитивов. ***Load Part*** позволяет подгружать геометрию из внешних файлов геометрии, а ***Part Libraries*** создает часть геометрии из местной библиотеки Comsol. Стоит отметить, что узел *Part* может иметь свои собственные локальные параметры (*Local Parameters*). Все части (*parts*) геометрии определены в ***Global Definitions***, т. е. принадлежат всей модели, а не только одной компоненте. Чтобы добавить какую-либо из частей геометрии в узел ***Geometry*** компоненты, необходимо зайти в узел этой геометрии и в ленте, на вкладке ***Geometry***, выделить правую кнопку ***Parts***, затем выбрать кнопку со значком ( ) и названием требуемой части, которая ранее определена в *Global definitions*.

Существуют задачи, в которых, в зависимости от какого-либо параметра, меняется конструкция геометрии, например меняется форма какого-либо объекта или сам объект. В программе Comsol можно это реализовать с помощью блока опций ***programming***, расположенных в ленте узла ***Geometry***. Данные опции представляют собой логические операции *if*, *if else*, *else*, *end if*. Эти логические операции реализуются в результате создания узлов в модели, для которых в настройках узла необходимо написать логическое условие. Если условие истинно, то последовательность геометрий, следующая за данным логическим оператором до другого узла геометрии с логическим оператором, будет включена в модель. В противоположном случае, когда условие ложно, часть геометрии, следующая за данным логическим оператором до следующего логического оператора, будет выключена из расчета модели. Закрытие

логической цепочки осуществляется оператором (узлом) *End if*. Принцип работы реализации условных операторов геометрии в Comsol может быть отображена следующим образом:

Структура дерева узла геометрии	Условия включения части геометрии
Части геометрии № 1	Независимо от логического оператора
Else If условие № 1	Если условие № 1 истинно
Части геометрии № 2	
Else If условие № 2	Если условие № 1 ложно и условие № 2 истинно
Части геометрии № 3	
If условие № 3	Если условие № 2 и № 1 ложно и условие № 3 истинно
Части геометрии № 4	
...	
Else If условие № N-1	Если условие с № 1 по (N-2) ложно и условие № (N-1) истинно
Части геометрии № N	
Else If условие № N	Все условия ложны
Части геометрии № N+1	
End If	
Части геометрии № N+2	Независимо от логического оператора

Во всех узлах геометрических операторов необходимо писать логические выражения, синтаксис которых можно посмотреть в приложении.

Последним этапом работы с узлом ***Geometry***, как правило, и последним узлом в дереве узла ***Geometry***, но не всегда, является определение созданной геометрии как единого объекта (*Form a union*) или как сборки различных частей геометрии (*Form an assembly*). По умолчанию создается единый объект. ***Form an assembly*** используется в ряде задач, например, с подвижной сеткой или с какими-либо последовательными условиями для сокращения расчетной области.

Глава 5.

Описание физических свойств модели. Узел *Materials*

В данной части работы рассматриваются основные способы задания физических свойств какой-либо области геометрии. Кратко дается представление о разнице глобальных и локальных узлов ***Materials***.

5.1. Назначение узла

Любое физическое явление протекает в какой-либо среде, и характер поведения данного явления будет зависеть от физических свойств среды. Будь это проявление электромагнетизма, например, от значений магнитной проницаемости или от кривой насыщения будет зависеть распределение значений магнитной индукции, или же задача расчета температурного поля, в которой в зависимости от значений теплопроводности будет меняться скорость распространения теплового потока. Можно привести множество других примеров, в которых от свойства среды меняется характер физического явления. Узел ***Materials*** служит для описания физических свойств материалов пользователем с помощью встроенных библиотек, внешних функций или значений, введенных непосредственно пользователем.

5.2. Описание узла *Materials*

Узел ***Materials*** есть в каждой компоненте модели, а также в узле ***Global Definitions***. Свойства материалов, которые заданы в компоненте, будут действовать только для физических интерфейсов данной модели. Глобальные узлы материалов (заданные в узле ***Global Definitions*** не определяют область, в которой они определены, но на них можно сослаться в любой компоненте модели. Рассмотрим этот вопрос более детально.

Первый способ задать физические свойства какому-либо объекту – с помощью библиотеки материалов. Необходимо нажать в ленте на вкладке ***Materials*** на кнопку ***Add Material***. В результате этого появится окно с библиотекой доступных материалов, отсортированных по применению в различных физических интерфейсах (рис. 5.1). По двойному нажатию на название требуемого материала он будет добавлен в дерево модели. Можно создать аналогичный узел, но без значений каких-либо свойств материала, другими словами, пустой (кнопка ***Blank Material*** в ленте на вкладке ***Materials***).

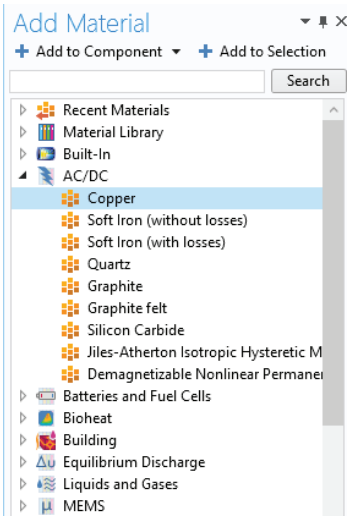


Рис. 5.1. Окно библиотеки материалов Comsol

В окне настроек данного узла вкладка ***Geometric Entity Selection*** отвечает за тип геометрии (точки, грани, поверхности и области) в перечне ***Geometric entity level*** и объекты, в которых будут определены данные свойства. Если подузлов со свойствами материалов несколько и они применены к одной и той же области, то в модели будет использоваться самый последний по списку. Другими словами, свойства данной области переопределены. Этому свидетельствует обозначение «*overridden*» в окне настроек выбора областей. На вкладке ***Material Properties*** можно добавить другие свойства материалов, если они не включены уже в перечень. Вкладки ***Material Contents*** задаются числен-

но или с помощью функций свойств материалов (рис. 5.2). На данной вкладке знак ( ) показывает, что физическое свойство не задано и его необходимо задать для решения выбранной физики в модели. Знак ( ) показывает, что величина корректно задана и она требуется для расчета физик, добавленных в модель. Знак ( ) указывает, что свойство материала было добавлено к материалу, но оно еще не определено. Запись требуется только в том случае, если свойство материала должно использоваться в модели. В столбце *Variables* указано название переменной, отображающее физическое свойство. В столбце *Value* указывается значение данного физического свойства. Можно эти свойства задать с помощью функции, например *fun1(T, normB)*. В данном случае *fun1* – название функции, которое должно быть определено в модели (например, в узле *definitions*) или как встроенная функция. *T* и *normB* – первая и вторая переменные, могут быть температурой и нормальной компонентой магнитной индукции. Столбец *Unit* отображает единицы измерения физической величины, а *Property group* отображает, в каком подузле хранится информация о данной переменной физического свойства.

Material Contents

Property	Variable	Value	Unit	Property group
Relative permeability	mur_i...	1	1	Basic
Electrical conductivity	sigma...		S/m	Basic
Relative permittivity	epsilo...		1	Basic

Рис. 5.2. Вкладка *Material Contents*

Любой добавленный материал имеет подузел, по умолчанию он имеет имя *Basic*. В этом подузле записаны все переменные для данного узла, например значение электропроводности для меди или кривая намагничивания стали. Можно добавить или удалить ряд из них. В данном подузле есть возможность задать собственные локальные функции, которые будут описывать свойства материала. Создать их можно при выборе в дереве конкретного подузела, допустим, это будет узел с названием «Basic», тогда в ленте во вкладке ***Materials*** появится доступ, чтобы создать 3 типа функций: *Analytic*, *Interpolation* и *Piecewise*. Созданные функции в этом подузле будут доступны для работы только в данном узле либо

по полной ссылке на данную функцию. (см. гл. 2 «Интерфейс Comsol Multiphysics»).

Добавлять новые шаблоны для свойств материалов или изменять уже существующие можно в окне ***Browse Materials***. Переход к нему доступен через ленту вкладки ***Materials***, по нажатию кнопки ***Browse Materials***.

Следующим способом добавления свойств материалов для компоненты является связь с глобальным узлом ***Materials*** с помощью опции ***Material Link***. Настройка данной опции также требует указать область геометрии, для которой свойства будут применимы, а также указать во вкладке ***Link Settings***, из какого глобального узла ***Materials*** брать эти свойства. Следовательно, необходимо изначально настроить глобальный узел ***Materials***. Есть возможность связывать глобальный узел ***Materials*** со сторонними ПО (внешним источником по отношению к Comsol), но эта тема выходит за рамки данной работы, поэтому здесь только указывается о такой возможности. Функция переключения материала (*Switch*) также не рассматривается.

Глава 6.

Дискретизация модели. Техника построения сетки. Узел *Mesh*

В данной главе рассматриваются способы построения сеток, основные доступные операции при разбиении геометрии на конечные элементы, а также статические и графические методы оценки качества построенной сетки.

6.1. Назначение сетки

Узел ***Mesh*** (сетка) предназначен для разбиения геометрии исследуемой модели на определенное количество конечных элементов. Для таких элементов записывается система уравнений, которая в совокупности описывает главное уравнение. Сетка также описывает область решений физики моделей, а именно – хранит информацию о решении системы уравнений.

6.2. Типы элементов

В МКЭ разделяют размерности геометрического пространства модели, для которой используется построение сетки. Размерность расчетной модели характеризует используемые элементы, например самая простая

дискретизация геометрии одномерной области заключается в разбиении интервала на конечные отрезки. Данный тип конечных элементов тривиален и детального описания не требует.

Интерес представляет дискретизация двух- и трехмерных областей геометрии модели. Для дискретизации двухмерной области, в Comsol Multiphysics используются треугольники и четырехугольники (рис. 6.1). В Comsol в одной области можно сочетать два типа таких элементов, как, например, на рис. 6.1, *в*, на котором внутренняя область круга разбита на четырехугольники, а внешняя – на треугольники. Целесообразно использовать треугольные конечные элементы в областях с круглой или сложной формой, а четырехугольные элементы – в частях, которые повторяют форму данного элемента.

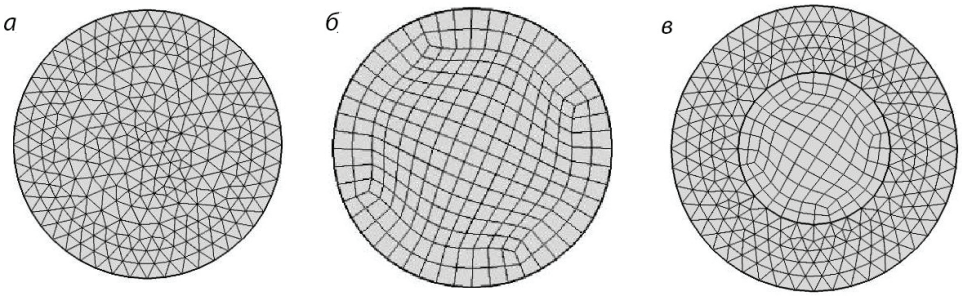


Рис. 6.1. Область с двухмерными элементами:
а – треугольники; *б* – четырехугольники; *в* – смешанная сетка типов элементов

Трехмерные типы конечных элементов в Comsol состоят из четырех типов: четырехгранники (тетраэдры), шестигранники (гексаэдры), призмы и пирамиды (рис. 6.2) [20, 12]. Так же как и в двухмерных моделях, данные типы конечных элементов можно использовать в совокупности с учетом ряда условий, о которых будет сказано ниже. Тетраэдры могут описать любую фигуру, поэтому являются чаще всего используемым типом конечного элемента. Кроме того, только данный тип элементов может описать адаптивную сетку (изменяется во время решения задачи в зависимости от предписанных условий). Остальные элементы используют, как правило, в случаях, когда необходимо уменьшить количество элементов расчетной области. Не всегда с помощью данных элементов

удается описать геометрию модели или корректно разбить моделируемую область.

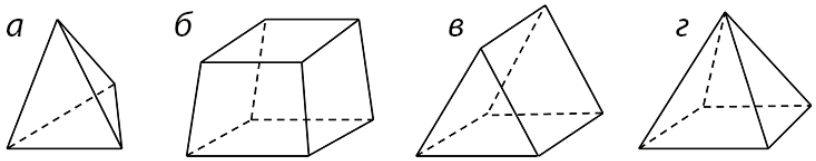


Рис. 6.2. Трехмерные типы конечных элементов:
а – тетраэдры; *б* – гексаэдры; *в* – призмы; *г* – пирамиды

Правильный подбор типов конечных элементов при разбиении геометрии может привести к уменьшению времени расчета задачи и качеству сетки. Стоит помнить, что не каждая физическая задача может быть решена с помощью дискретизации расчетной области определенными типами конечных элементов, например которые снижают вычислительный ресурс. Поэтому, при выборе сетки перед, исследователем всегда стоит задача поиска компромисса между качеством сетки и ее практичностью для решаемой задачи. Особо остро эти вопросы стоят в задачах по расчету физических процессов сплошных сред (гидро- или аэродинамика).

6.3. Интерполяционные полиномы в построении сеток

Многие физические задачи имеют сложные геометрические фигуры, которые необходимо качественно разбить на конечные элементы. Comsol, при визуализации сетки, отображает прямые ребра (для повышения графической производительности) [11]. В сущности математическое описание отличается от графического изображения наличием полиномов при описании непрерывной дискретной функции модели. В данной части пойдет речь о видах используемых полиномов и о возможностях их использования.

Можно выделить три вида элементов в зависимости от степени используемых в них полиномов: симплекс-, комплекс- и мультиплекс- элементы. Рассмотрим данные виды конечных элементов в математических

выражениях для двухмерного пространства. Сделанные выводы будут справедливы и для трехмерных задач.

Симплекс-элемент описывается полиномом, в котором присутствует константа и линейные члены, например для двухмерного треугольного элемента (рис. 6.3, *а*) можно записать выражение (6.1). Выражение (6.1) содержит три коэффициента и две линейные координаты x и y, поэтому данный элемент содержит три узла и прямые ребра [11].

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \tag{6.1}$$

Комплекс-элементы содержат полиномы высших порядков. Вид комплекс- и симплекс-элементов может быть одинаковым, но отличие комплекс-элементов в том, что они имеют дополнительные граничные условия (узлы).

Приведем выражение (6.2) для комплекс-элемента (рис. 6.3, *б*) одинакового типа с выражениеми (6.1), но с дополнительными условиями. Данный комплекс-элемент содержит на единицу узлов больше, чем размерность пространства, и непрямолинейные два ребра [20]. Мультиплекс-элементы содержат полиномы высокого порядка. Применяют их в ряде сложных задач ввиду сложности их граничных условий.

$$\begin{gathered} \phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2, \\ F(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) = 0. \end{gathered} \tag{6.2}$$

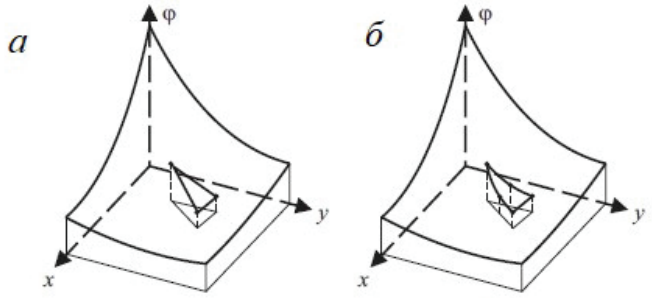


Рис. 6.3. Изображение функции (*а*) симплекс-, (*б*) комплекс-элемента на двухмерной координатной плоскости

6.4. Структура узла *Mesh*

Узел *Mesh* имеет панель, изображенную на (рис. 6.4), которая делится на разделы:

- ***Build*** (конструкция сетки) – раздел узла, включающий в себя функции построения сетки всех подузлов (***Build Mesh***, перемещение (***Mesh*** между подузлами сеток и добавление новых (***Add Mesh*** подузлов сетки;
- ***Physics Controlled*** (сетка под управлением физики) – раздел, определяющий автоматический размер разбиения сетки с помощью команды (*Fine. Reset* – функция сброса всех настроек сетки. *Edit* – функция перехода от автоматического построения сетки к пользовательским настройкам;
- ***Generators*** (генераторы сеток) – раздел, отвечающий за создание элементов определенной области;
- ***Operations*** (действия над сеткой) – блок, производящий различные манипуляции с построенной сеткой;
- ***Attributes*** (характеристики сетки) – часть узла, задающая параметры созданным сеткам;
- ***Import/Export*** – Comsol имеет возможности импортировать и экспортировать существующие сетки в определенных параметрах;
- ***Clear*** (анализ сетки) – данная часть отвечает в основном за оценку качества и количества построенной сетки.

Первые два раздела узла ***Mesh*** достаточно просто и исчерпывающе описаны в классификации. Остальные пять блоков (*Generators, Operations, Attributes, Impoer/Export, Clear*) требуют более детального объяснения и указаний по их применению. В последующих частях данной главы будут описаны эти блоки с рядом примеров.

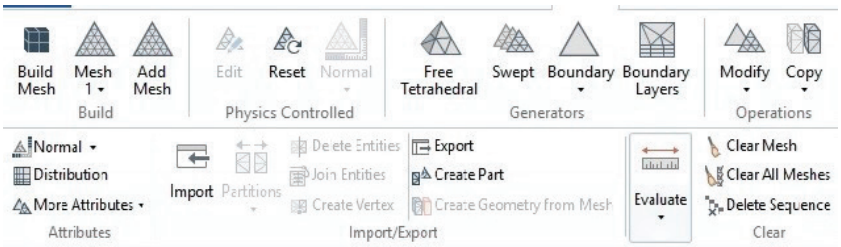


Рис. 6.4. Панель узла ***Mesh***

6.5. Техника построения сеток

В Comsol Multiphysics 5.2a существует автоматическое создание сеток для задач общей физики, гидродинамики, теплопередачи, плазмы, радиочастот, полупроводников и механики. Ограниченный ресурс вычислительной техники заставляет в некоторых случаях вручную настраивать сетку. В данной части опишем основные подходы по настройке сетки, а также возможности узла ***Mesh***.

Free Tetrahedral (четырехгранники) – самый распространенный трехмерный вид сетки, используемый в Comsol. Данный узел создает неструктурированную сетку тетраэдров. Узел ***Free Tetrahedral*** настраивается с помощью блока ***Attributes*** (свойства), состоящего из ряда типов настроек.

- Узел ***Size*** (размер) – это тип настроек характеристик сетки, определяющий пространственные размеры элементов сетки. Применяется как глобальная настройка для всего узла ***Mesh***, а также может использоваться локально для дочерних узлов сеток. Окно настроек содержит раздел ***Domain Selection***, который описан ниже, и ***Element Size Parameters***. ***Element Size Parameters*** позволяет настраивать размер элементов по следующим параметрам: *Maximum elements size*, *Minimum elements size*, *Maximum elements growth rate*, *Curvature factor*, *Resolution of narrow regions*. *Maximum elements size* и *Minimum elements size* определяют параметры максимального и минимального размеров элемента сетки.

- ***Maximum elements growth*** – настройка сетки, описывающая максимальное увеличение размеров элементов сетки из области с более

маленькими размерами элементов в область с большими размерами конечных элементов. Например, если скорость роста элементов 1.5, то последующий элемент увеличит размер не более чем на 50 % [20]. ***Curvature factor*** – фактор кривизны, который определяет размер элементов вдоль криволинейной границы относительно радиуса кривизны этой границы. Чем меньше этот коэффициент, тем больше количество элементов будет вписано в радиус кривизны. ***Resolution of narrow regions*** характеризует количество элементов в самом узком месте выбранной области. Если данный коэффициент меньше 1, то в узком месте меньше одного элемента, если больше 1, то количество элементов будет равняться коэффициенту.

- ***Distribution*** (распределение) определяет плотность сетки выбранной области. Окно настроек состоит из опций ***Domain Selection*** и ***Distribution***. ***Distribution*** можно настраивать тремя способами: ***Explicit Distribution***, ***Fixed number elements***, ***Predefined distribution type***. ***Explicit Distribution*** – определение густоты сетки с помощью заданного пользователем ряда возрастающих чисел с указанием в скобках относительной длины элемента. ***Fixed number elements*** определяет количество элементов в данной области. ***Predefined distribution type*** определяет уменьшение или увеличение размера элементов в арифметической или геометрической прогрессии в зависимости от выбранных настроек.

- ***Corner Refinement*** (уточнения узких углов) снижает размер элементов при острых углах, в двухмерной задаче – вершина, а в трехмерной – ребро. Окно настроек состоит из разделов ***Domain Selection***, ***Boundary Selection***, ***Angel*** и ***Refinement***. Для определения острого угла необходимо активировать ***Boundary Selection*** и выбрать поверхности. Разделы ***Angel*** и ***Refinement*** определяют минимальный угол между соседними поверхностями и коэффициент масштабирования элементов для расчета коэффициента уточнения.

Настройка построения тетраэдральной сетки осуществляется в окне ***Settings*** (настройки) с помощью разделов, которые используются в ряде других настроек узла ***Mesh*** с аналогичными функциями.

- ***Domain Selection*** (выбор области) (рис. 6.5, *а*) определяет область, в которой строят тетраэдральнную сетку. ***Remaining*** использует область геометрии, не определенную ранее в узле ***Mesh***. ***Entire geometry*** создает геометрию во всей области геометрии. ***Domain*** – ручное определение области для построения сетки.

- ***Scale geometry*** (масштаб геометрии) (рис. 6.5, *б*) применяют для масштабирования геометрии во время создания сетки, изменяя x, y, z до положительного действительного числа. Если какой-либо из масштабируемых коэффициентов не равен единице, программное обеспечение масштабирует геометрию в плоскости xyz перед операцией построения сетки. После построения сетки геометрия принимает первоначальное значение. Коэффициент масштабирования помогает создавать анизотропную сетку. Анизотропная сетка полезна, когда генератор сеток затрудняется построить сетку из-за узкой области геометрии.

- ***Control Entities*** (рис. 6.5, *в*) позволяет сглаживать переходы между несвязанными частями сетки. Активировать сглаживание сетки можно, проставив галочку в графе *Smooth across removed control entities*. Настройка размытия переходных частей сетки осуществляется в полях ***Number of iterations*** и ***Maximum element depth to process***. ***Number of iterations*** позволяет изменять количество итераций сглаживания поля сетки. В ***Maximum element depth process*** указывается максимальный размер элемента, для которого сетка будет размыта.

- ***Tessellation*** (рис. 6.5, *г*) обусловливает выбор метода построения данного вида сетки. Пользователь Comsol может выбрать один из трех методов. По умолчанию используется ***Automatic***, с помощью которого программа самостоятельно определяет лучший алгоритм построения сетки для данной области. ***Delaunay*** – вид алгоритма, который способен изменять граничную сетку для достижения лучшего качества разбиения области. ***Delaunay (legacy version)*** – аналогичный алгоритм указанному выше, использовался в более ранних версиях Comsol Multiphysics.

- ***Element quality optimization*** (рис. 6.5, *д*) контролирует количе-

ство вычислительных ресурсов, которое расходуется на оптимизацию качества сетки. ***Basic*** – уровень оптимизации, при котором качество элементов сетки не превышает 0.2, ***Medium*** – 0.35, ***High*** задействует все доступные операции оптимизации. ***High*** в сложных геометриях может потребовать больших вычислительных ресурсов. Дополнительные две настройки раздела ***Element quality optimization*** снижают количество вырожденных элементов при наличии сильно криволинейной геометрии(***Avoid inverted curved elements***) и уменьшают размеры элемента до определенного заданного размера (***Avoid too large elements***). Дополнительные две настройки могут привести к увеличению времени дискретизации сетки и ухудшению качества элементов.

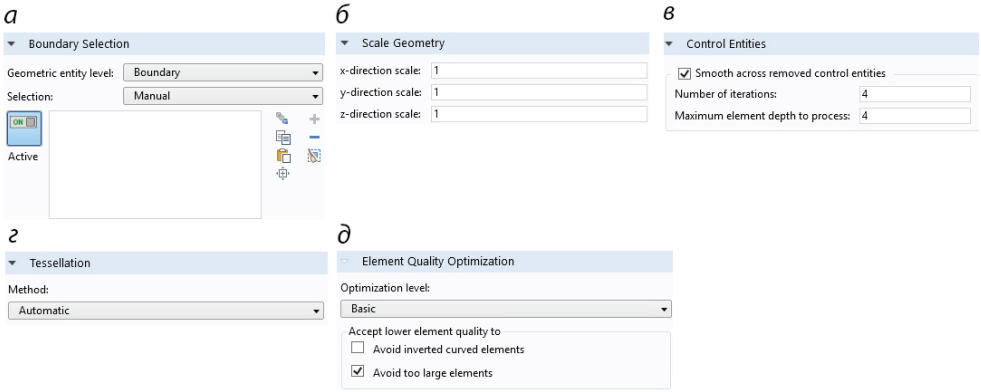


Рис. 6.5. Разделы окна Settings (настройки)

Free Triangular (треугольники) – опция создает треугольную сетку на поверхности в трехмерном пространстве и области в двухмерной задаче. Окно ***Settings*** состоит из разделов: ***Boundary Selection***, ***Scale Geometry***, ***Control Entitles***, ***Tessellation***.

Free Quad (четырехугольники) создает сетку из четырехугольников в трехмерной задаче для поверхности, а в двухмерной – для области. Окно ***Settings*** состоит из разделов: ***Boundary Selection***, ***Scale Geometry***, ***Control Entitles***, ***Tessellation***.

Mapped создает структурную четырехугольную сетку, основанную на трансфинитной интерполяции. Можно контролировать размер, количество и распределение элементов с помощью локальных настроек ***Size***

и ***Distribution***. ***Edge Controls*** позволяет самостоятельно настраивать отношение между четырьмя сторонами логической единицы площади, а также границы вокруг области. В окне настроек ***Advanced Settings*** можно выбрать метод интерполяции.

Swept (протяжка) с помощью протяжки от поверхности источника вдоль выбранной области до конечной поверхности создает сетку в трехмерном пространстве. Можно контролировать размер, количество и распределение конечных элементов с помощью ***Size*** и ***Distribution***. Узел ***Swept*** считывает свойство из глобального узла ***Size*** или локального, принадлежащего этому же уровню узла. Аналогично для характеристики ***Distribution***. Окно ***Settings*** состоит из разделов: ***Domain Selection***, ***Source Faces***, ***Destination Faces***, ***Sweep Method***, ***Control Entities***, ***Linking Faces*** (рис. 6.6).

- ***Source Faces*** определяет исходную поверхность сетки, которая будет протянута вдоль выбранной области.

- ***Destination Faces*** – выходная поверхность, помогающая задать направление протяжки сетки.

- ***Sweep Method***. ***Face method meshing*** позволяет выбрать тип сетки на поверхности источника в случае, если она не определена заранее. ***Quadrilateral*** (***Generate hexahedrons***) и ***Quadrilateral (Legacy version)*** создают поверхностную сетку четырехугольников, последний использует алгоритм более ранних версий Comsol. ***Triangular (Generate prisms)*** создает поверхность с треугольными элементами. ***Sweeping path calculation*** предназначен для расчета формы протяжки пути. ***Automatic*** – программа самостоятельно выбирает способ определения пути протяжки. ***Sweep following straight lines*** – все точки сетки расположены на прямой между поверхностью источника и конечной. ***Sweep following circular arcs*** – все точки сетки расположены на дуге окружности между исходной поверхностью и конечной. ***Sweep using interpolation*** – положение точек сетки внутри области определяется по интерполяционной процедуре. ***Destination Mesh*** определяет метод переноса источника сетки на протяжении всей области. ***Use a rigid transformation*** – конечная поверхностная сетка получается путем трансформации источника сетки. ***Morph source onto destination***

– конечная поверхностная сетка получается из источника сетки методом трансформации. ***Project source mesh onto destination*** – конечная поверхностная сетка получается из источника сетки методом проекции. ***Linking Faces*** – выбор метода интерполяции, который используется в ***Mapped***.

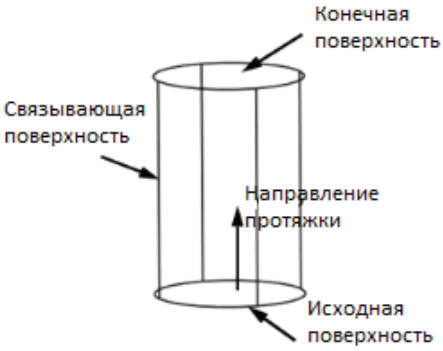


Рис. 6.6. Структура метода построения сетки ***Swept***

Узел ***Swept*** (протяжка) требует предустановок (определения источников сетки и конечных поверхностей, см. рис. 6.6), поэтому не всегда удается реализовать данный узел. Стоит отметить, что исходные и конечные поверхности могут быть определены не один раз.

Boundary Layer – тип сетки с плотным распределением элементов в нормальном направлении вдоль выбранных границ. Данная сетка часто используется в задачах на потоки жидкости, чтобы устранить тонкие пограничные слои вдоль границ без проскальзывания. В двухмерной задаче сетка задается с помощью четырехугольников. В трехмерной постановке задачи используются призматические или шестигранные элементы в зависимости от формы элементов пограничного слоя.

В окне ***Settings***, раздел ***Corner Settings***, определяется тип обработки острых углов. В строке ***Handling of sharp edges*** (***corner*** для двухмерной задачи) три типа обработки: ***Splitting***, ***Trimming***, ***None***. ***Splitting*** означает способ расщепления граничного слоя на острые углы. ***Minimum angle for splitting*** определяет минимальный угол для смежных границ пограничного слоя. Параметр ***Maximum angle for splitting***

контролирует максимальный угол в области расщепления. ***Trimming*** подрезает сетку пограничного слоя в острых углах. Соответственно параметры ***Maximum*** и ***Minimum angle for splitting*** определяют такие же параметры, как и в случае ***Splitting***. Выключает разрешение острых углов ***None***. Параметр ***Maximum layer decrement*** характеризует максимальную разницу количества граничных слоев между соседними точками на границе пограничного слоя. Дочерний узел ***Boundary Layer Properties*** определяет границы пограничных слоев и такие свойства, как количество и глубина пограничного слоя. ***Number of boundary layers*** определяет количество граничных слоев. ***Boundary layer stretching factor*** характеризует коэффициент, который увеличивает глубину следующего пограничного слоя подобно работе ***Maximum elements growth***. ***Thickness of first layer*** определяет толщину первого элемента граничного слоя. Ее можно задавать через ***Thickness adjustment factor***, который масштабирует высоту первичного элемента с помощью данного коэффициента или через абсолютную величину толщины слоя (***Thickness***).

Convert – важная функция в Comsol для построения сетки, позволяющая строить сетку с различными типами конечных элементов для геометрии, в которой окружающая среда не позволяет использовать метод ***Swept***. ***Convert*** позволяет перестраивать поверхности с четырехугольным типом сетки между областями с треугольными конечными элементами на их поверхностях. Пирамидоидальные элементы сетки получаются между конвертируемой треугольной сеткой поверхности и шестигранной или призматической сеткой поверхности.

Окно настройки (*Settings*) узла ***Convert*** содержит два раздела: ***Geometric entity selection*** и ***Element split method***. ***Geometric entity selection*** позволяет выбрать область для конвертирования сетки. ***Element split method*** позволяет выбирать два метода перестроения сетки. ***Insert diagonal edges*** разделяет каждый четырехугольный элемент на два треугольных и каждый шестигранный элемент на пять тетраэдров. ***Insert diagonal points*** делит конечные элементы по точкам, что позволяет достичь большего количества дискретных элементов: каждый четырехугольник делится на четыре треугольника, каждый шестигранник – на двадцать восемь тетраэдров.

Reference позволяет ссылаться на другой узел сетки для построения данного узла сетки. Наличие подузла ***Scale***, который масштабирует

сетку с определенным заданным коэффициентом, перед ***Reference*** создаст сетку с именными размерами, в отличие от той, на которую была ссылка. С помощью локального узла ***Expand*** можно расширить ссылку, применяя ее к нескольким узлам сеток.

Refine улучшает качество сетки за счет дробления на меньшие части конечных элементов. Данная опция измельчает сетку с помощью двух методов: ***Split longest side*** и ***Regular refinement***. Первый способ делит самую длинную сторону во время уточнения сетки. ***Regular refinement*** – обычный способ уточнения сетки. Поле ***Number of Refinements*** определяет количество элементов уточнений сетки.

Действие «копирование сетки» (***Copy Domain***), ***Copy Face***, ***Copy edge***, ***Copy*** часто используется при наличии большого количества одинаковых частей, форм геометрии для того, чтобы не настраивать сетку каждого элемента геометрии обособленно. Все четыре вида копирования сетки обладают четырьмя основными видами настройки: ***Source*** – источник, откуда копируется сетка; ***Destination*** – область, в которую копируется сетка; ***Type of copy*** делится на ***Single destination (many-to-one)***, копирует источник сетки в области назначения, и ***Array copy (many-to-many)*** – каждые источники сетки копирует в назначенную область. Для ***Copy edge*** существует дополнительный раздел настройки ориентации сетки.

6.6. Анализ качества сетки

Качество построенной сетки можно оценить с помощью опции ***Statistics*** (рис. 6.7), которая расположена в ленте узла ***Mesh*** или вызывается правой клавишей по узлу ***Mesh*** в дереве модели. Критерии, приведенные в окне ***Statistics***, влияют на время получения и сходимость решения задачи, а также на точность результатов.

Программный пакет Comsol предлагает следующие критерии оценки:

- ***Mesh vertices*** – количество узловых точек сетки;
- ***Element type*** позволяет выбрать, по какому типу сетки на экран будет выводиться статистика;
- ***Minimum element quality*** – минимальное качество элемента. Разработчики Comsol Multiphysics рекомендуют настраивать сетку, что-

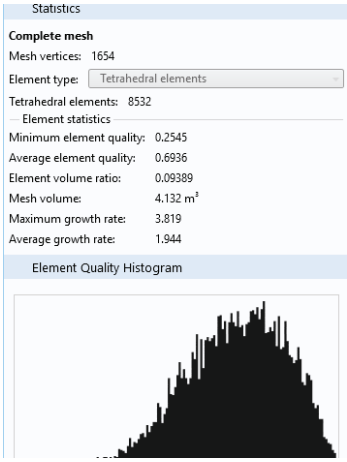


Рис. 6.7. Окно параметров и гистограмма качества сетки

бы наименьшее качество элементов было не ниже 0.1. Качество сетки оценивается в пределах 0–1. Единица характеризует идеальный симметричный конечный элемент. Ноль описывает плоский, дегенеративный элемент;

- ***Average element quality*** – среднее качество всех элементов сетки;
- ***Element volume ration*** – отношение объемов меньшего и большего элементов сетки. Позволяет оценить перепад сетки, что в некоторых моделях влияет на точность результатов;
- ***Mesh volume*** – суммарный объем всех элементов сетки. Данный критерий целесообразно в некоторых случаях сравнивать с общим объемом геометрии, анализируя корректность заполнения сетки области геометрии;
- ***Maximum*** и ***Average growth rate*** описывают максимальную и среднюю скорость возрастания размеров элементов; дают больше информации о скорости роста элементов при описании узла ***Size***;
- ***Element Quality Histogram*** – распределение количества элементов в зависимости от качества. Ось абсцисс характеризует качество элементов слева направо (с нуля до единицы). Ось ординат харак-

теризует количество элементов, соответствующих определенному значению качества элементов сетки.

Качество сетки визуально можно оценить с помощью функции ***Plot***, которую можно вызвать по нажатию правой клавиши мыши на узел ***Mesh*** в ***Model Building***. В постобработке появится подузел, стандартное название которого «Mesh». Настройка трехмерного отображения качества сетки во многих случаях помогает найти некачественные области.

Рассмотрим возможности данного подузла. ***Data*** ссылается на узел сетки, из которого берется информация для построения. ***Level*** – выбор отображаемых элементов (***Volume*** – объем, ***Surface*** – пространства, ***Line*** – линии, ***Point*** – точки). Можно также сделать отбор по построению типа сетки в строке *Element type* между треугольными и четырехугольными элементами. Раздел ***Color*** интуитивно понятен, позволяет редактировать цветовую гамму, отображаемую в графическом окне. ***Element filter*** позволяет фильтровать элементы по заданному признаку. Это наиболее используемый инструмент при анализе сетки. Например, использование функции ***Worst(Best) element*** позволяет определить области с вырожденными элементами. ***Expression*** позволяет задать необходимое выражение для анализа. Возможно с помощью данной функции создавать разрезы и смотреть вид сетки внутри объекта. ***Element scale factor*** увеличивает или уменьшает элементы в графическом интерфейсе.

Глава 7.

Физические модули

7.1. Теория электромагнетизма. *AC/DC*-физический модуль

Модуль ***AC/DC*** содержит физические интерфейсы, служащие для расчета электрических и магнитных полей, длины волн которых сопоставимы с пространственными размерами исследуемой (рассчитываемой) области объекта, в различных приближениях, в зависимости от постановки задачи, граничных условий и режимов работы. Электромагнитная волна распространяется в пространстве мгновенно при моделировании с помощью физических интерфейсов модуля ***AC/DC***. Стоит отметить, что эффектами запаздывания распространения электромагнитных волн в пространстве пренебрегают. Эффекты «запаздывания», или немгновенное распространение электромагнитной волны в пространстве, присущи при расчете, например, устройств телекоммуникаций и радиосвязи. Для таких задач в Comsol Multiphysics реализован модуль ***Radio Frequency***. Поскольку подавляющее большинство электротехнологических и электромеханических установок имеет такие габаритные размеры и рабочие частоты электромагнитного поля, что длина электромагнитной волны сопоставима с размерами установки, постольку эффектом «запаздывания» можно пренебречь.

Для целостного понимания моделируемых процессов целесообразно перед тем, как перейти к описанию функционала физического интерфейса ***AC/DC***, разобраться с рядом базовых теоретических понятий. Начать стоит с четырех уравнений, сформулированных Джеймсом Клерком

Максвеллом в 1973 г. в своем знаменитом «Трактате об электричестве и магнетизме» [22], обобщающем всю теорию электромагнетизма. Закон Ампера (или иногда говорят «теорема о циркуляции магнитного поля») выражается в виде уравнением (7.1), закон Фарадея (закон электромагнитной индукции) Максвеллом был представлен в виде выражения (7.2), закон (теорема) Гаусса был записан для магнитного поля (7.3) и электрического поля (7.4). Любое электромагнитное явление можно описать с помощью этих четырех уравнений.

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J}; \tag{7.1}$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \tag{7.2}$$

$$div\mathbf{B} = \mathbf{0}; \tag{7.3}$$

$$div\mathbf{D} = \rho, \tag{7.4}$$

где $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля; $\mathbf{J}$ – суммарная плотность тока; $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля; $\mathbf{B}$ – магнитная индукция; $\mathbf{D}$ – электрическая индукция (плотность электрического потока); ρ – объемная плотность стороннего электрического заряда. Примечание: в математике принято векторные величины обозначать жирным шрифтом.

Суммарную плотность тока в уравнении (7.1) можно представить в виде:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_D, \tag{7.5}$$

где $\mathbf{J}_{ext}$ – плотность тока, подводимого от внешнего (стороннего) источника; $\mathbf{J}_i$ – плотность индуцированных токов; $\mathbf{J}_v$ – плотность тока, создаваемая в проводнике, перемещающемся со скоростью; $\mathbf{J}_D$ – плотность тока электрического смещения.

В уравнении (7.5) плотности тока, подводимого от внешнего источника и индуцированных токов, можно определить с помощью закона Ома в дифференциальной форме, который запишем для каждой составляющей тока следующим образом [23]:

$$\mathbf{J}_{ext} = \sigma\mathbf{E}_{ext}; \tag{7.6}$$

$$\mathbf{J}_i = \sigma\mathbf{E}_i, \tag{7.7}$$

где $\mathbf{E}_{ext}$, $\mathbf{E}_i$ – векторные напряженности электрического поля, создаваемые внешними источниками и индуцированными токами соответственно; $\boldsymbol{\sigma}$ – электропроводность, которая может быть как скалярной величиной, так и тензорной.

Широко известно явление возникновения дополнительной компоненты тока $\mathbf{J}_v$ за счет движения проводника со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле $\mathbf{B}$ (с учетом того, что движение проводника намного меньше скорости света). Данную составляющую можно определить как

$$\mathbf{J}_v = \boldsymbol{\sigma}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right]. \tag{7.8}$$

Плотность тока смещения (абсорбционный ток) возникает из-за изменения электрической индукции. Введение понятия тока смещения Джеймсом Клерком Максвеллом позволило разрешить противоречие в формуле Ампера для циркуляции магнитного поля (7.1), а также является следствием из закона сохранения электрического заряда. Примером протекания тока смещения является конденсаторная батарея, через которую протекает переменный ток. Известно, что конденсаторная батарея имеет диэлектрический промежуток, через который не может протекать ток за счет электропроводности. Разрешает этот парадокс ток смещения, который можно определить как

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{7.9}$$

тогда можно переписать суммарную плотность тока как

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_D = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{7.10}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_v.$$

Здесь $\mathbf{E}_{ext}$ – напряженность электрического поля внешнего источника; $\mathbf{E}_i$ – напряженность индуцированного поля; $\mathbf{E}_v$ – напряженность электрического поля, вызванная движением среды, $\mathbf{E}_v = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$.

Необходимо дополнить вышеперечисленные математические выкладки уравнениями связи между магнитной (электрической) индукцией и напряженностью поля. Начнем с определения связи между магнитными величинами

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}, \qquad (7.11)$$

где μ – абсолютная магнитная проницаемость; μ_0 – абсолютная проницаемость вакуума, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\mathbf{M}$ – намагниченность; χ_m – магнитная восприимчивость; μ_r – относительная магнитная проницаемость среды.

Абсолютная магнитную проницаемость можно представить в виде скалярной зависимости от каких-либо параметров, а также тензорной величины.

Связь между плотностью электрического потока $\mathbf{D}$ и напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ определяется по выражению

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\mathbf{E}, \qquad (7.12)$$

где ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость, Ф/м; ε_0 – диэлектрическая проницаемость воздуха, Ф/м; $\mathbf{P}$ – поляризованность, Кл/м^2; χ_e – электрическая восприимчивость; ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость, Ф/м.

Прежде чем перейти к рассмотрению физических интерфейсов полевых задач магнитных и электрических полей, введем ряд определений, которые помогут понять использование того или иного интерфейса, реализованного в Comsol Multiphysics.

Решения уравнений (7.1)–(7.4) требуют описания функций векторных полей, которые характеризуются тремя компонентами для трехмерных задач. Эти функции могут иметь разрывы первого и второго рода, что приведет к невозможности или значительному усложнению дискретизации исследуемой области пространства модели с помощью метода конечных элементов. Поэтому вводят специальные функции, которые называют потенциалами. Для различных задач и допущений выделяют скалярный магнитный потенциал, скалярный электрический потенциал, векторный магнитный потенциал и векторный электрический потенциал.

Скалярный электрический потенциал. Скажем, что электрическое поле не изменяется во времени, тогда в уравнении (7.2)) производная магнитной индукции будет равна нулю (7.13)

$$rot\mathbf{E} = 0. \qquad (7.13)$$

Поскольку $rot(grad(\varphi)) = 0$, тогда можно записать

$$\mathbf{E} = -grad\varphi,$$

где φ – непрерывная функция, которую будем называть скалярный потенциал. Знак минус перед ней показывает согласованность необходимости выполнения работы, когда заряд движется в поле, которое создано одним из зарядов (или их системой) того же знака. Электрический потенциал можно интерпретировать как необходимую работу для переноса единичного заряда из одной точки электрического поля в другую точку. Эту функцию легко нормировать, например: $\varphi(\infty) = 0$, – что позволяет проще математически описывать резкие скачки (разрывы первого рода) искомой функции решения некоторых задач.

Скалярный магнитный потенциал. Рассмотрим магнитное поле, порожденное источником тока или постоянными магнитами. Изменением магнитного во времени пренебрежимо мало. При такой формулировке задачи распределение магнитного поля за пределами области источника (где J=0; M=0) можно, переписав уравнение (7.1), записать как (7.14)

$$rot\mathbf{H} = 0, \tag{7.14}$$

тогда, учитывая, что $rot(grad(\varphi_m)) = 0$, можно написать по аналогии со скалярным электрическим потенциалом следующее выражение:

$$\mathbf{H} = -grad(\varphi_m).$$

Функция φ_m называется магнитным скалярным потенциалом; как и электрический скалярный потенциал, непрерывная, дифференцируемая и может принимать постоянное значение. Эта постоянная величина может быть определена, если принять $\varphi_m = 0$ в выбранной точке области, где функция φ_m определена. Однако проблема обычно встречается при скачке φ_m. В задачах без токов достаточно принять, что его изменение гладкое.

Векторный магнитный потенциал. Поскольку магнитное поле является бездивергентным (7.3), определим векторную функцию (7.15) при помощи отношения [24]

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}. \tag{7.15}$$

Эта функция, называемая магнитным векторным потенциалом, является непрерывной, и ее распределение однозначно дает распределение плотности магнитного потока **B**. Потенциал магнитного вектора неоднозначен и может отличаться градиентом любой скалярной функции. Можно предпринять меры для ограничения этой функции, и одна из них, используемая для калибровки при низкочастотном моделировании, является условием Кулона

$$div\mathbf{A} = 0. \tag{7.16}$$

Векторный электрический потенциал. Реже всего встречается в моделях векторный электрический потенциал, причем в Comsol на данный момент нет физических интерфейсов, которые решают задачи относительно данной физической величины, но для полноты картины стоит упомянуть о нем.

Векторный электрический потенциал **T** можно определить несколькими путями. Наиболее часто встречается

$$\mathbf{J} = -rot\mathbf{T}. \tag{7.17}$$

Подставим уравнение (7.17) в выражения (7.1) и (7.5), получим

$$rot\left(\frac{1}{\gamma}rot\mathbf{T}\right) = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Это уравнение может быть использовано для решения магнитного поля, где член выражения $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ заранее известен.

Phasor (фазор). Гармонически изменяющуюся величину можно представить с помощью комплексных чисел, что упрощает выполнение арифметических действий над данными величинами. Скажем, что у нас есть некоторая физическая величина $Z(r,t)$, распределенная в пространстве r и времени t

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r},t) = \mathbf{Z}(\mathbf{r})\cos(\boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{\varphi}),$$

где $Z(r)$ – распределение переменной в пространстве, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая частота, $\boldsymbol{\varphi}$ – начальный угол сдвига, j – мнимая единица, тогда ее можно переписать в комплексной форме с помощью формулы Эйлера

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r},t) = \mathbf{Z}(\mathbf{r})\cos(\boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{\phi}) = \Re\left(\mathbf{Z}(\mathbf{r})\,e^{j\boldsymbol{\varphi}}e^{j\boldsymbol{\omega}t}\right) = \Re\left(\underline{\mathbf{Z}}(\mathbf{r})\,e^{j\boldsymbol{\omega}t}\right).$$

$\underline{\mathbf{Z}}(\mathbf{r})$ называют фазором, который состоит из амплитуды и фазы поля и является независимым от времени.

Преимущество использования данного подхода заключается в простоте выполнения алгебраических действий, например производная по времени заменяется на выражение $j\omega$, как показано ниже:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \Re\left(j\omega \underline{\mathbf{Z}}(\mathbf{r})\, e^{j\omega t}\right).$$

Выше были описаны основные законы физики электромагнитного поля (по уравнениям Максвелла), на которых базируется физический модуль ***AC/DC***в Comsol Multiphysics. Перейдем к описанию программной реализации математики электромагнитных полей и их формулировок, встроенной в пакете Comsol. Стоит отметить, что пакет численного моделирования Comsol Multiphysics имеет достаточно широкий спектр модулей для решения задач электромагнитных полей (рис. 7.1), некоторые содержат в себе реализацию не только уравнений электромагнетизма, а, например, включают подвижную сетку и уравнения Лагранжа (*Rotating Machinery* и *Practical Tracing*).

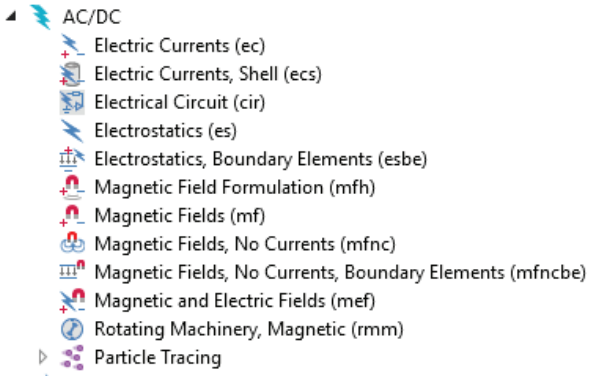


Рис. 7.1. Физические интерфейсы модуля ***AC/DC***

Формат данной работы не позволяет охватить описание всех указанных физических интерфейсов на рис. 7.1, поэтому в работе рассматриваются наиболее часто используемые модели для расчета электротехнологических устройств (***Electric Currents***, ***Electrostatics***, ***Magnetic***

Field Formulation, ***Magnetic Fields***, ***Magnetic Fields No currents***, ***Magnetic and Electric Fields***. Доступные типы исследований и размерности моделей для каждого интерфейса приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Основные возможности физических интерфейсов модуля ***AC/DC***

Название интерфейса	Поддерживаемые размерности моделей интерфейсом	Поддерживаемые типы исследований интерфейсом
Electrical Circuit	Не зависит от пространства	Stationary; frequency domain; time dependent; small signal analysis, frequency domain
Electric Currents	Любая размерность	Stationary; stationary source sweep; frequency domain; time dependent; small signal analysis, frequency domain
Electrostatics	Любая размерность	Stationary; time dependent; stationary source sweep; eigenfrequency; frequency domain; small signal analysis, frequency domain
Magnetic Fields	3D, 2D, 2D осесимметричная	Stationary; frequency domain; time dependent; small signal analysis, frequency domain; coil geometry analysis (только для трехмерных задач)
Magnetic Field Formulation	3D, 2D, 2D осесимметричная	Stationary; frequency domain; time dependent; small signal analysis, frequency domain
Magnetic Fields, No Currents	3D, 2D, 2D осесимметричная	Stationary; frequency domain; time dependent
Magnetic and Electric Fields	3D, 2D, 2D осесимметричная	Stationary; frequency domain; small signal analysis, frequency domain; coil geometry analysis (3D only)

7.2. *Magnetic Fields*. A-формулировка

Физический интерфейс ***Magnetic Fields*** предназначен для расчета магнитного поля с помощью уравнений Максвелла, записанных с помощью A-формулировки. Дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие поведения магнитного поля в физическом интерфейсе ***Magnetic Fields***, записываются относительно векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}$. Следовательно, искомой величиной, которую необходимо рассчитать для получения распределения магнитного поля, является векторный магнитный потенциал (A_x, A_y, A_z). Уравнения, которые описывают этот физический интерфейс, зависят от типа исследований: для стационарного исследования (*Stationary study*) (7.18), для гармонического анализа (*Frequency domain*) (7.19) и для динамического исследования (*Time-dependent*) (7.20).

$$\sigma\mu(\mathbf{v} \times rot\mathbf{A}) + div(grad\mathbf{A}) = \mu\mathbf{J}_{ext}. \tag{7.18}$$

$$-j\omega\sigma\mu\underline{\mathbf{A}} + \sigma\mu(\mathbf{v} \times rot\underline{\mathbf{A}}) + div(grad\underline{\mathbf{A}}) = \mu\mathbf{J}_{ext}. \tag{7.19}$$

$$\sigma\mu\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \sigma\mu(\mathbf{v} \times rot\mathbf{A}) + div(grad\mathbf{A}) = \mu\mathbf{J}_{ext}. \tag{7.20}$$

Применим дифференциальный оператор rot к уравнению (7.1), тогда получим

$$rot(rot(\mathbf{H})) = rot(\mathbf{J}).$$

Используя известное выражение из математики векторных полей

$$rot(rot(\mathbf{H})) = grad(div(\mathbf{H})) - div(grad(\mathbf{H})),$$

которое справедливо для любой гладкой векторной функции $\mathbf{H}$, получим

$$grad(div(\mathbf{H})) - div(grad(\mathbf{H})) = rot(\mathbf{J}), \tag{7.21}$$

$grad(div(\mathbf{H})) = 0$ (по уравнению (7.3)). В правую часть уравнения (7.21) подставим выражения (7.5)–(7.8) и получим

$$\sigma rot(\mathbf{E}) + \sigma rot(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + div(grad(\mathbf{H})) = rot(\mathbf{J}_{ext}). \tag{7.22}$$

Заменим в уравнении (7.22) $rot(\mathbf{E})$ с помощью уравнения (7.2), а вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ заменим согласно материальному уравнению (7.11), тогда получим H-формулировку (7.23) (см. ***Magnetic field formulation***).

$$\sigma\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \sigma\mu rot(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + div(grad(\mathbf{H})) = rot(\mathbf{J}_{ext}). \qquad (7.23)$$

Если заменить вектор магнитной напряженности $\mathbf{H}$ в выражении (7.23), используя определение векторного магнитного потенциала (7.15) и материальное уравнение (7.11), получим формулировку векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}$ для динамического исследования (7.20). Для стационарных исследований справедливо утверждение, что изменение любой рассматриваемой в задаче переменной в зависимости от времени равно нулю. Математическим языком это утверждение можно записать с помощью выражения $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$. Для гармонического анализа производную по времени заменяют на $j\omega$ и переходят к анализу переменных, записанных в виде фазоров (комплексное представление величин) согласно теории функции комплексной переменной. Если воспользоваться вышенаписанными математическим выражениями для уравнения (7.20), получим соотвественно формулировки уравнений магнитного поля для стационарного (7.18) и гармонического (7.19) исследований, записанные относительно векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}$ и фазора векторного магнитного потенциала $\underline{\mathbf{A}}$ соотвественно.

Окно настроек ***Magnetic Fields*** выглядит практически одинаково для всех размерностей компонент (рис. 7.2). Как для всех вышеупомянутых случаев, ***Domain Selection*** определяет, для каких областей геометрии будут справедливы уравнения этой физики. Во вкладке ***Equation*** отображаются уравнения, которыми описывается данная физика в общем случае. Вкладка ***Thickness*** доступна только для плоскопараллельной задачи (двухмерная задача). В этом окне настроек указывается ширина расчетной области, необходимая для расчета ряда интегральных величин, например сопротивлений катушек, усилий и т. д. На вкладке ***Discretization*** можно определить тип элементов аппроксимации сетки для данной геометрии. ***Dependent Variables*** показывает, какие неизвестные используются и как они обозначаются в этой физике.

Программа Comsol Multiphysics создает по умолчанию 3 узла – это ***Amper's Law***, ***Magnetic Fields*** и ***Initial Values*** для любых размерностей компонент задач физического интерфейса ***Magnetic Fields***. Эти три созданные по умолчанию узла служат для описания в модели минимального набора настроек для возможности приступить к расчету диф-

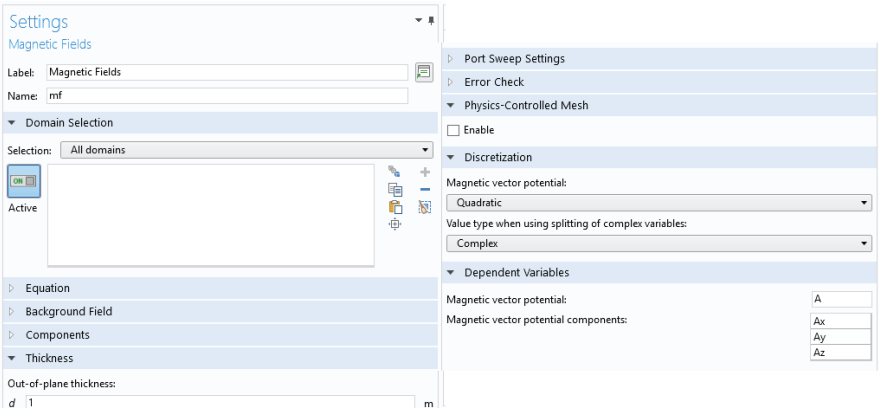


Рис. 7.2. Окно настроек узла ***Magnetic Fields***

ференциальных уравнений в частных производных. Минимальный набор настроек для решения дифференциальных уравнений – это математическая запись решаемого дифференциального уравнения, начальные и граничные условия для конкретной задачи. Эти узлы можно редактировать, переопределять, но нельзя удалить. ***Amper's Law*** описывает одно из уравнений (7.18)–(7.20) в зависимости от типа исследования для выбранной области. Узел ***Magnetic insulation*** определяет граничное условие нулевого значения нормальной компоненты векторного магнитного потенциала на границах расчетной области. ***Initial values*** задает начальные значения распределения векторного магнитного потенциала в исследуемом пространстве.

Разберем основные настройки узлов в данной физике. В трехмерных компонентах узлы физического интерфейса ***Magnetic Fields*** можно определять для областей (***Domains***), поверхностей (***Boundaries***), пар геометрических объектов (***Pairs***), ребер (***Edges***) и точек (***Points***). Для двухмерных компонент принцип остается такой же, только размерность геометрических объектов на единицу меньше, чем для трехмерного случая (рис. 7.3).

Первым узлом, применяемым для областей, является ***Ampere's Law***. Как уже говорилось, его основным назначением является описание распределения магнитного поля для заданной области. В окне настроек узла ***Ampere's Law*** опция ***Material Type*** определяет, как свойства материала интерпретируются в модели при деформации сетки. Если вы-

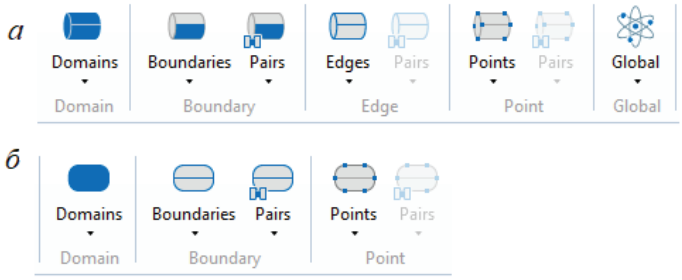


Рис. 7.3. Лента настроек физики ***Magnetic Fields***для трехмерных (*а*) и двухмерных (*б*) компонент

брать настройку ***Solid*** (твердый) опции ***Material Type***, свойства материала будут изменяться как функции деформации сетки. Настройка ***Non-solid*** (полый) опции ***Material Type*** характеризует свойства материалов только как функции текущего локального состояния в каждой точке пространственной области. На вкладке ***Coordinate System Selection*** пользователь может определить систему координат для данного узла физики. В большинстве случаев эта настройка применяется для описания анизотропных свойств модели. На вкладках ***Magnetic Fields***, ***Conduction Current*** и ***Electric Field*** пользователь может выбрать вид материальных уравнений (7.6), (7.11), (7.12), которые будет использоваться в данном узле.

Узел ***Ampere's Law, Magnetostrictive*** предназначен для описания магнитного поля в магнитострикционных материалах согласно уравнению

$$\mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{H} + \mathbf{M}\left(\mathbf{H}, S_{mech}\right) + \mathbf{M_r}\right],$$

где $\mathbf{M}\left(\mathbf{H}, S_{mech}\right)$ – намагниченность материала в зависимости от магнитного поля и механической напряженности, А/м; $\mathbf{M_r}$ – остаточная намагниченность, А/м.

Узел ***Gauge Fixing for A-Field*** служит для нормировки векторного потенциала согласно тому, что дивергенция магнитного векторного потенциала равна нулю (7.16). Это позволяет в некоторых случаях улучшить гладкость функции векторного магнитного потенциала и повысить сходимость решения задачи. Об этом упоминалось при описании физического смысла векторного магнитного потенциала.

Узел ***Velocity (Lorentz term)*** предназначен для учета плотности тока, возникающей из-за движения проводящего элемента в магнитном поле. Это физическое явление описывается уравнением (7.8). Для учета движения проводящего элемента, в модели необходимо добавить узел ***Velocity (Lorentz term)***, выбрать область, для которого он будет определен, и ввести характерную скорость движения по каждой координате, соответствующей данной области, в настройках. Стоит отметить, что данный узел не поддерживается в физическом интерфейсе ***Magnetic Fields*** в трехмерном случае. Такая опция для трехмерных задач реализована в физическом интерфейсе ***Magnetic and electric fields***.

Граничные условия, реализованные в Comsol Multiphysics для физики ***Magnetic Fields***, показаны на рис. 7.4. Граничные условия ***Magnetic Insulation*** и ***Perfect Magnetic Conductor*** предназначены для описания условий полного затухания и проводимости магнитных полей. Различие этих граничных условий можно увидеть на рис. 7.5.

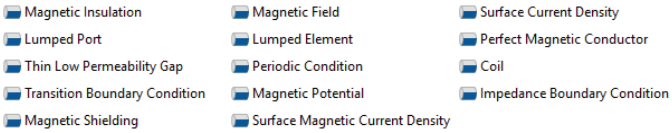


Рис. 7.4. Граничные условия

Узел граничного условия ***Magnetic Fields*** позволяет задать распределение напряженности магнитного поля на выбранной границе. Подобными ему являются ***Magnetic Potential***, ***Surface Magnetic Current Density*** и ***Surface Current Density***, которые задают граничное условие первого рода в виде векторного магнитного потенциала, поверхностного магнитного потока и электрического тока соответственно.

Другими важными граничными условиями, позволяющими снизить вычислительные мощности при расчете модели, являются ***Magnetic Shielding***, ***Thin Low Permeability Condition***. Граничное условие ***Magnetic Shielding*** (магнитный экран) служит для того, чтобы имитировать тонкий слой с высокими значениями магнитной проницаемости, заданными в узле ***Materials*** или прописанными вручную в окне настроек. Для настройки этого граничного условия пользователю необходимо указать толщину имитируемого слоя в строке *Surface thickness*. Целесообразно использовать граничное условие «Тонкий разрыв с низкой

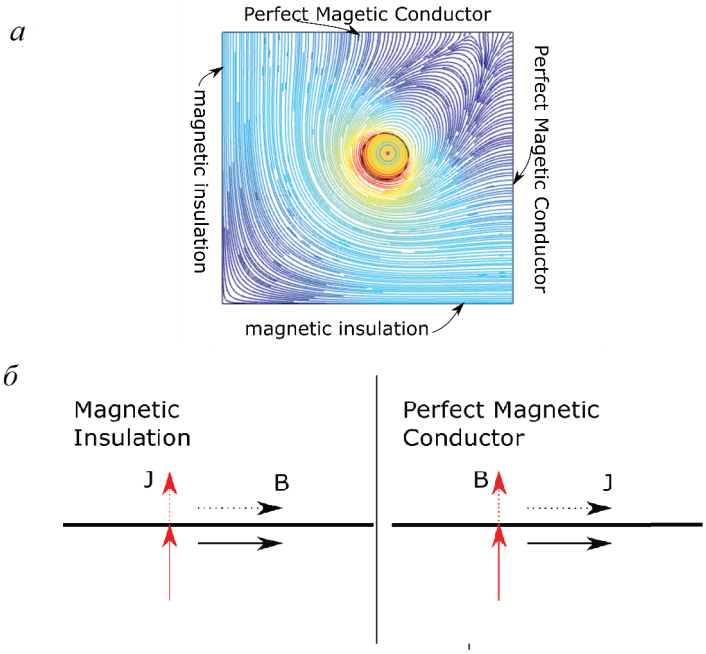


Рис. 7.5. Линии магнитного поля с граничными условиями ***Magnetic Insulation*** и ***Perfect Magnetic Conductor***: *а* – картина поля; *б*– схематичное представление линий на границах расчетной области

проницаемостью» (***Thin Low Permeability Condition***) для моделирования зазоров в магнитных материалах, заполненных материалом с меньшей относительной проницаемостью. На практике можно столкнуться с рядом задач, в которых необходимо рассчитать магнитное поле объекта, содержащего маленькие пространственные элементы относительно размеров всей расчетной области, но существенно влияющие на результат моделирования поля. Такие элементы пространства можно моделировать с помощью переходного граничного условия (***Transition Boundary Condition***). Это условие имитирует изменения магнитного поля на границе в зависимости от заданных пользователем в настройках узла геометрических параметров и физических свойств слоя. Все граничные условия предназначены для разрешения узких регионов геомет-

рии, в которых придется не строить сетку, а заменить эту узкую область на граничное условие. Например, таким способом можно моделировать шихтованную сталь индуктора или воздушные зазоры в электрических машинах, а также тонкие железные каналы в МГД-насосах.

7.3. *Magnetic field formulation*. H-формулировка

Физический интерфейс ***Magnetic field formulation*** использует для расчетов H-формулировку (7.23) уравнений Максвелла. Магнитное поле рассчитывается относительно неизвестного вектора магнитной напряженности поля **H**. В большинстве случаев H-формулировку используют при расчете сверхпроводников. Такой подход удобно использовать в расчетах магнитного поля при известной напряженности магнитного поля на одной из границ, например расчет индуцированных токов в проводнике, находящемся в магнитном поле.

В интерфейсе ***Magnetic field formulation*** создают четыре основных узла: *Faraday's Law*, *Magnetic Gauss' Law*, *Initial Values*, *Magnetic Insulation*. Последние два узла аналогичны узлам, описанным в разделе ***Magnetic Fields***. Узел ***Faraday's law*** описывает закон Фарадея (уравнение Максвелла (7.2)) с материальным уравнением (7.24). Узел ***Magnetic Gauss' Law*** описывает уравнение (7.3), которое является законом Гаусса.

$$\mathbf{E} = \frac{rot\mathbf{H} - \mathbf{J_e}}{\sigma}. \tag{7.24}$$

Еще одним отличием данного интерфейса от ***Magnetic Fields*** является узел ***External Current Density***. Он описывается уравнением (7.25), из которого следует, что, помимо заданного распределения внешней плотности тока, в данной области будет составляющая вихревого тока,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}\left(rot\mathbf{H} - \mathbf{J_e}\right). \tag{7.25}$$

7.4. *Magnetic field, no currents.* V_m-формулировка

Физический интерфейс ***Magnetic field, no currents*** использует в своих расчетах формулировку уравнений, которую в научной литературе называют V_m-формулировкой. В этом интерфейсе уравнения магнитного поля считаются относительно неизвестного скалярного магнитного потенциала V_m. Как правило, данный интерфейс используют для моделирования постоянных магнитов части, по которым протекает постоянный ток, или, в связке с другими физическими интерфейсами, для моделирования только части расчетной области, в которой отсутствуют индуцируемые токи. Основной узел интерфейса ***Magnetic Flux Conservation*** описывается с помощью уравнений (7.26) и (7.3). Такой подход моделирования позволяет снизить нагрузку на вычислительную станцию из-за снижения количества неизвестных в решаемых уравнениях с трех до одной.

$$\mathbf{H} = -gradV_m. \tag{7.26}$$

7.5. *Magnetic and electric fields.* A-φ формулировка

Интерфейс ***Magnetic and electric fields*** предназначен для расчета электрических полей относительно скалярного электрического потенциала φ и векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}$. Часто в литературе [25] такую формулировку уравнений Максвелла называют **A-φ** формулировкой и записывают ее в виде

$$rot(\frac{1}{\mu}rot(\mathbf{A})) + \sigma(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + grad(\varphi)) = \mathbf{J}_{ext}, \tag{7.27}$$

а напряженность электромагнитного поля рассчитывают с помощью следующего выражения:

$$\mathbf{E} = -grad(\varphi) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{7.28}$$

Искомыми величинами в данном интерфейсе являются четыре неизвестные – это (A_x, A_y, A_z) и φ. Переход к стационарной или квазистационарной модели осуществляется, как в разделе ***Magnetic Fields***, в результате приравнивания производной по времени к нулю или замены ее на член $j\omega$.

Основным узлом, описывающим уравнения (7.27), (7.28), является ***Ampere's Law and Current Conservation***. Также в данном интерфейсе можно использовать узел ***Ampere's Law*** из ***Magnetic Fields***. Такой подход позволяет варьировать формулировки уравнений в одном интерфейсе в зависимости от задачи.

Остальные узлы физики практически идентичны описанным в разделе ***Magnetic Fields***. Основным преимуществом данного интерфейса является то, что можно совместно моделировать как электрическое поле, так и магнитное. Например, моделировать источник электромагнитного поля (индуктор) с помощью приложенной разности потенциалов и учитывать влияние кривизны пространства исследуемого объекта на значения электрического потенциал. В свою очередь, в связи с наличием тока, возникшего из-за разности потенциалов, возникнет вихревое магнитное поле, которое также повлияет на распределение плотности тока (скин-эффект) и возбудит дополнительные индуцируемые токи. Таким примером может служить кондукционный МГД-насос.

7.6. Способы моделирования катушек

Один из важных этапов моделирования магнитного поля – это корректное описание источника магнитного поля, которым являются согласно теории поля движущиеся заряды (токи, постоянные магниты).

В программе Comsol Multiphysics реализованы три основных способа описания катушек возбуждения магнитного поля:

- узел или граничное условие в физическом интерфейсе – катушка (***Coil***);
- граничные условия, описывающие сосредоточенные параметры (***Lumped Port***);
- узел – внешняя плотность тока (***External Current Density***).

Наиболее удобным и часто используемым инструментом моделирования протекания тока в физике магнитного поля является узел ***Coil***. Узел ***External Current Density*** используют при известных значениях или математическом законе, описывающем распределение плотности тока в пространстве. Граничные условия ***Lumped Port*** имитируют сосредоточенные параметры (элементы цепи) между границами выбранных областей. Такой подход удобно использовать для расчета устройств на высоких частотах, что позволяет экономить время расчета модели. Главное правило при моделировании катушек возбуждения – они должны образовывать замкнутый контур и него вокруг должна быть среда, в которую будет распространяться электромагнитное поле, созданное катушками. Катушка может быть замкнута сама на себя (рис. 7.6, *а*) или через граничные условия, как правило, это границы расчетной области (например, ***Magnetic insulation*** или ***Perfect Magnetic Conductor*** – рис. 7.6, *б* и *г*) [12]. Разомкнутый тип катушки (рис. 7.6, *в*) недопустим для моделирования в Comsol Multiphysics. Для улучшения сходимости, особенно в трехмерных задачах, электропроводности не должны равняться нулю (можно принять значение близкие нулю, например 0.1 См/м).

Окно настроек узла ***Coil*** содержит такие же вкладки, как и узел ***Ampere's Law*** (***Domain Selection***, ***Material Type***, ***Coordinate System Selection***, ***Conduction Current***, ***Magnetic Field*** и ***Electric Field***), за исключением вкладки ***Coil***. В данной вкладке, в строке ***Coil name***, можно поменять название катушки, которое будет отображаться в переменных. Comsol Multiphysics позволяет моделировать катушки как источник тока (***Current***), напряжения (***Voltage***), мощности (***Power***) и внешние цепи (***Circuit***) на поле *Coil excitation*. Описание процесса моделирования катушек с помощью внешних цепей можно посмотреть в разделе ***Electrical Circuit***. Моделирование катушки как источника мощности доступно только для двухмерных задач. При задании напряжения в двухмерной и осесимметричной задачах стоит помнить, что напряжение зависит от ширины катушки, заданной в главном узле физики ***Magnetic Fields***. По закону Ома заданная ширина в модели повлияет на полученное значение токов в катушке и другие интегральные величины (сопротивление, индуктивность и т. д.).

В Comsol встроены два типа моделей для моделирования катушек с помощью узла ***Coil***: ***Single conductor*** (одножильная

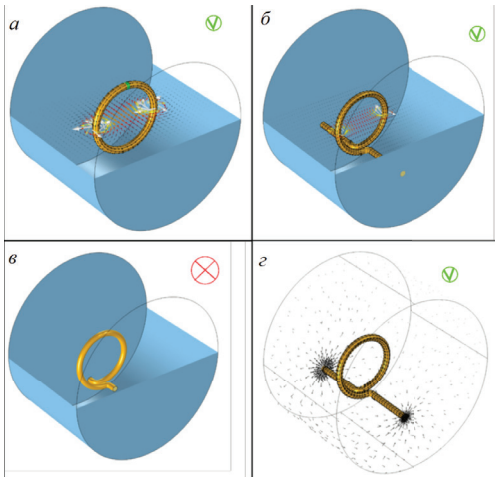


Рис. 7.6. Виды контуров катушек [12]:
замкнутый (*а*); замкнутые на граничные условия ***Magnetic Insulation*** (*б*) и ***Perfect Magnetic Conductor*** (*г*); разомкнутый (*в*)

катушка) и ***Homogenized multi-turn*** (многовитковая катушка с равномерным распределением плотности тока). Тип моделей можно поменять в окне настроек этого узла, на вкладке ***Conductor model***. Модель катушки ***Single conductor*** можно представить как одножильную катушку, которая учитывает резистивные (неоднородность распределения плотности тока из-за гетерогенности геометрии) и индуктивные явления (скин-эффект, эффект близости). Для учета емкостных эффектов необходимо использовать модуль ***Magnetic and electric fields*** и в нем выбирать узел ***RLC-Coil***. Рассмотрим задачи, демонстрирующие возможности описанной выше модели катушки ***Single conductor*** в двухмерном размерности пространства.

Задача 1. Скин-эффект

Рассчитать магнитное поле, создаваемое прямым проводником с круглым поперечным сечением, по которому протекает переменный

ток. Задан радиус сечения 10 мм; ток, протекающий по проводнику, равен 10 А. Необходимо вычислить плотности тока в проводнике на частотах 50, 1000, 50 000 Гц. Показать распределение плотностей тока по сечению проводника.

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Frequency Domain***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано на рисунке ниже. Эти параметры можно использовать в модели для задания различных величин.

Name	Expression	Value	Description
r	10[mm]	0.01 m	
I	10[A]	10 A	
f1	50[Hz]	50 Hz	
f2	1000[Hz]	1000 Hz	
f3	50000[Hz]	50000 Hz	

3. В узле ***Geometry*** создаем круг (***Circle***) радиусом ***r*** и прямоугольник (***Rectangle***), заданный таким образом, чтобы круг находился внутри него.

4. Добавим в узел ***Materials*** материалы ***Air*** и ***Copper*** из библиотеки материалов. ***Copper*** расположен в библиотеке ***AC/DC***, а ***Air*** – в ***Liquids and Gases/Gases***. Кругу соответствует материалу ***Copper***, а прямоугольнику – ***Air***.

5. В настройке физического интерфейса ***Magnetic Fields*** необходимо добавить блок ***Coil*** и определить его для области круга. В настройках ***Coil current*** (I_{coil}) вводим значение параметра ***I***.

6. Для осуществления расчетов нескольких значений частоты необходимо записать **f1 f2 f3** в параметре ***Frequencies***, в блоке ***Study 1*** ⇒ ***Step 1:Frequency Domain***.

7. Запускаем решение исследования, нажав на кнопку ***Compute***.

8. Построим распределение плотности электрического тока по глубине проводника, сделав с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Line Graph***. В узле ***Data Sets*** необходимо создать кривую ***Cut Line 2D***, вдоль которой планируется строить распределение. В настройках ***Cut Line 2D*** необходимо определить, из какого исследования брать решение. Делается это в настройках данного узла, на вкладке ***Data Sets***, затем в настройках графика ***Line Graph*** необходимо задать ***Cut Line 2D*** как источник данных, а в окне *Expression* необходимо записать: ***abs(mf.Jz)***.

Задача 2. Эффект близости

Рассчитать магнитное поле, возбуждаемое двумя прямыми медными проводами круглого сечения, которые расположены вблизи друг от друга, по которым протекает переменный ток. Даны размеры радиусов сечения провода $\boldsymbol{r}$ – 10 мм, расстояние между их центрами радиусов $\boldsymbol{d}$ – 40 мм, значение тока, протекающего по проводникам $\boldsymbol{I}$ – 10 А. Необходимо вычислить плотности тока в проводниках при частотах 50, 1000, 50 000 Гц. Показать распределение плотностей тока по сечению проводников.

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields***⇒ ***Frequency Domain***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже. Эти параметры можно использовать в модели для задания различных величин.

Name	Expression	Value	Description
r	10[mm]	0.01 m	
d	40[mm]	0.04 m	
I	10[A]	10 A	
f1	50[Hz]	50 Hz	
f2	1000[Hz]	1000 Hz	
f3	50000[Hz]	50000 Hz	

3. В узле ***Geometry*** создаем два круга (***Circle***) с радиусами ***r*** и центрами в точках $(d/2, 0)$ и $(-d/2, 0)$, а также прямоугольник (***Rectangle***), заданный так, чтобы оба круга находились внутри него.

4. Добавим в узел ***Materials*** материалы ***Air*** и ***Copper*** из библиотеки материалов. ***Copper*** расположен в библиотеке ***AC/DC***, а ***Air*** – в ***Liquids and Gases/Gases***. Кругу соответствует материалу ***Copper***, а прямоугольнику – ***Air***.

5. В настройке физического интерфейса ***Magnetic Fields*** необходимо добавить блок ***Coil*** и определить его для областей провода (круги). В настройках ***Coil current*** (I_{coil}) вводим значение параметра ***I***.

6. Для осуществления расчетов нескольких значений частоты необходимо записать **f1 f2 f3** в параметре ***Frequencies***, в блоке ***Study 1*** $\Rightarrow$ ***Step 1:Frequency Domain***.

7. Запускаем решение исследования, нажав на кнопку ***Compute***.

8. Построим распределение плотности электрического тока по глубине проводника. Это можно сделать с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Line Graph***. В узле ***Data Sets*** необходимо создать кривую ***Cut Line 2D***, вдоль которой планируется строить распределение. В настройках ***Cut Line 2D*** необходимо определить, из какого исследования брать решение. Делается это в настройках данного узла на вкладке ***Data Sets***. Затем в настройках графика ***Line Graph*** необходимо задать ***Cut Line 2D*** как источник данных. В окне ***Expression*** необходимо записать: ***abs(mf.Jz)***.

Задача 3. Расчет индуктивности кольца

Рассчитать индуктивность медного кольца и сравнить ее с аналитическими расчетами. Радиус сечения кольца ***r*1** составляет 4 мм. Расстояние от оси симметрии до центра кольца ***R*1** равно 40 мм. Значение тока в кольце ***I*** выбирается произвольно.

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D Axisymmetric*** ⇒ ***Magnetic Fields***⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже. Эти параметры можно использовать в модели для задания различных величин.

Name	Expression	Value	Description
I	10[A]	10 A	
r1	4	4	радиус сечения [мм]
R1	40	40	радиус кольца [мм]

3. В узле ***Geometry*** создаем круг (***Circle***) с радиусом $\boldsymbol{r1}$ на расстоянии $\boldsymbol{R1}$ от оси симметрии и прямоугольник (***Rectangle***), заданный таким образом, чтобы круг находился внутри него и расстояние от круга до сторон прямоугольника (кроме оси симметрии) было больше 100 мм.

4. Добавим в узел ***Materials*** материалы ***Air*** и ***Copper*** из библиотеки материалов. ***Copper*** расположен в библиотеке ***AC/DC***, а ***Air*** – в ***Liquids and Gases/Gases***. Кругу соответствует материалу ***Copper***, а прямоугольнику – ***Air***.

5. В настройке физического интерфейса ***Magnetic Fields***необходимо добавить блок ***Coil*** для области круга. В настройках изменяем параметр ***Coil current*** (I_{coil}) на **I**.

6. Запускаем решение исследования, нажав на кнопку ***Compute***.

7. Построим распределение плотности электрического тока по глубине проводника. Это можно сделать с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Line Graph***. В узле ***Data Sets*** необходимо создать кривую ***Cut Line 2D***, вдоль которой планируется строить распределение. В настройках ***Cut Line 2D***необходимо определить, из какого исследования брать решение. Делается это в настройках данного узла, на вкладке ***Data Sets***, затем в настройках графика ***Line Graph*** необходимо задать ***Cut Line 2D*** как источник данных. В окне ***Expression*** необходимо записать: ***abs(mf.Jz)***.

8. Определить индуктивность можно с помощью ***Derived Values***, добавив в него ***Global Evaluation***. В окне ***Expression*** необходимо записать: ***mf.LCoil_1***. Полученное значение нужно сравнить
с результатом аналитического расчета, используя следующую формулу:

$$L = \mu_0 R1(\ln \frac{8R1}{r1} - 1.75),$$

где μ_0 – абсолютная магнитная проницаемость воздуха; R – сечение медного провода.

Задача 4. Расчет индуктивности провода круглого сечения

Рассчитать индуктивность прямолинейного медного провода круглого сечения радиусом ***R*** 4 мм и длиной ***l*** 2 м и сравнить ее с аналитическими расчетами. Значение тока ***I*** провода выбирается произвольно.

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields***⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже. Эти параметры можно использовать в модели для задания различных величин.

Name	Expression	Value	Description
R	4[mm]	0.004 m	
l	2[m]	2 m	
I	1[A]	1 A	
a	1.365*l	2.73 m	

3. В узле ***Geometry*** создаем круг (***Circle***) радиусом ***R*** и квадрат (***Square***). Центр обеих фигур находится в начале координат, а сторона квадрата в 1.365 больше длины провода (величина ***a***).

4. Добавим в узел ***Materials*** материалы ***Air*** и ***Copper*** из библиотеки материалов. ***Copper*** расположен в библиотеке ***AC/DC***, а ***Air*** – в ***Liquids and Gases/Gases***. Кругу соответствует материалу ***Copper***, а прямоугольнику – ***Air***.

5. В настройке физического интерфейса ***Magnetic Fields*** необходимо в пункте ***Thickness*** задать параметр d равным $\boldsymbol{l}$ (длине провода) и добавить блок ***Coil*** для области круга. В настройках изменяем параметр ***Coil current*** ($\mathbf{I_{coil}}$) на $\boldsymbol{I}$.

6. Запускаем решение исследования, нажав на кнопку ***Compute***.

7. Построим распределение плотности электрического тока по глубине проводника. Это можно сделать с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Line Graph***. В узле ***Data Sets*** необходимо создать кривую ***Cut Line 2D***, вдоль которой планируется строить распределение. В настройках ***Cut Line 2D*** необходимо определить, из какого исследования брать решение. Делается это в настройках данного узла, на вкладке ***Data Sets***, затем в настройках графика ***Line Graph*** необходимо задать ***Cut Line 2D*** как источник данных. В окне *Expression* необходимо записать: ***abs(mf.Jz)***.

8. Определить индуктивность можно с помощью ***Derived Values***, добавив в него ***Global Evaluation***. В окне *Expression* необходимо записать: ***mf.LCoil_1***. Полученное значение нужно сравнить с результатом аналитического расчета, используя следующую формулу:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}(\ln\frac{2l}{R} - 0.75),$$

где μ_0 – абсолютная магнитная проницаемость воздуха; l – длина катушки; R – сечение медного провода.

Задача 5. Расчет индуктивности провода прямоугольного сечения

Рассчитать индуктивность прямого медного провода прямоугольного сечения 4×3 мм ($b \times c$) длиной $\boldsymbol{l} = 2$ м и сравнить с аналитическими расчетами. Значение тока провода $\boldsymbol{I}$ выбирается произвольно.

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже. Эти параметры можно использовать в модели для задания различных величин.

Name	Expression	Value	Description
b	8[mm]	0.008 m	
c	1[mm]	0.001 m	
l	5[m]	5 m	
I	1[A]	1 A	
a	1.365*l	6.825 m	

3. В узле ***Geometry*** создаем прямоугольник (***Rectangle***) с размерами ***b*** и ***c*** и квадрат (***Square***). Центр обеих фигур находится в начале координат, а сторона квадрата в 1.365 больше длины провода (величина ***a***).

4. Добавим в узел ***Materials*** материалы ***Air*** и ***Copper*** из библиотеки материалов. ***Copper*** расположен в библиотеке ***AC/DC***, а ***Air*** – в ***Liquids and Gases/Gases***. Кругу соответствует материалу ***Copper***, а прямоугольнику – ***Air***.

5. В настройке физического интерфейса ***Magnetic Fields*** необходимо в пункте ***Thickness*** задать параметр d равным $\boldsymbol{l}$ (длине провода) и добавить блок ***Coil*** для области круга. В настройках изменяем параметр ***Coil current*** (I_{coil}) на **I**.

6. Запускаем решение исследования, нажав на кнопку ***Compute***.

7. Построим распределение плотности электрического тока по глубине проводника. Это можно сделать с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Line Graph***. В узле ***Data Sets*** необходимо создать кривую ***Cut Line 2D***, вдоль которой планируется строить распределение. В настройках ***Cut Line 2D*** необходимо определить, из какого исследования брать решение. Делается это в настройках данного узла на вкладке ***Data Sets***, затем в настройках графика ***Line Graph*** необходимо задать ***Cut Line 2D*** как источник данных. В окне ***Expression*** необходимо записать: ***abs(mf.Jz)***.

8. Определить индуктивность можно с помощью ***Derived Values***, добавив в него ***Global Evaluation***. В окне ***Expression*** необходимо записать: ***mf.LCoil_1***. Полученное значение нужно сравнить с результатом аналитического расчета, используя формулу

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}(\ln\frac{l+\sqrt{l^2+g^2}}{g} - \frac{\sqrt{l^2+g^2}}{l} + \frac{g}{l});$$

$$g = 0.2236(b+c).$$

Рассмотрев возможности модели катушки ***Single Conductor*** для двухмерных задач, стоит перейти к описанию особенностей этой процедуры для трехмерных. При моделировании катушки с помощью модели ***Single Conductor*** в трехмерной области необходим дополнительный шаг исследования (***Study***) ***Coil Geometry Analysis***. Этот шаг исследования просчитывает направление протекания тока в области пространства катушек. Узел ***Coil*** содержит дочерний узел ***Geometry Analysis*** для определения корректирующих коэффициентов длины и площади катушки (***Coil length multiplication factor*** и ***Coil area multiplication factor***). Эти опции нужны при решении симметричных задач в трехмерной постановке, а именно: при рассмотрении части катушки, например половины длины и площади поперечного сечения, необходимо значения факторов указать равными двум. Также подузел ***Geometry Analysis***

содержит под- узлы (доступные для добавления при нажатии на него правой кнопкой мыши) ***Input***, ***Output*** и ***Connected Boundaries***. Для замкнутого типа контура катушки (см. рис. 7.6, *а*) достаточно определить поверхность втекания тока с помощью узла ***Input***. Для катушек, которые замыкаются через граничные условия (см. рис. 7.6, *б* и *г*), необходимо определить поверхность втекания (узел ***Input***) и вытекания (узел ***Output***) тока. Для этого поверхность втекания и вытекания тока катушки должна соприкасаться с поверхностями на границах расчетной области. Узел ***Connected Boundaries*** моделирует условное соединение разомкнутых в пространстве частей катушки, как показано на рис. 7.7, *а* [12]. В двухмерных задачах подобная опция доступна при включении галочки *Coil group* в настройках узла ***Coil***. Она предписывает последовательное электрическое соединение всех выбранных доменов для данного узла – одинаковое значение протекания тока в каждой выбранной области (рис. 7.7, *б*). При включении условия ***Coil Group*** в двухмерных задачах, Comsol Multiphysics позволяет добавлять дочерние узлы в узел ***Coil***, такие как ***Reversed Current Direction*** и ***Domain Group***.

Узел ***Reversed Current Direction*** служит для моделирования противоположного направление протекания тока в выбранной области. Например, если в настройках узла ***Coil*** задан ток 10 А, для областей, в которых определен подузел ***Reversed Current Direction***, значение тока будет равным −10 А.

Узел ***Domain Group*** предназначен для создания групп доменов. Его основное назначение – это возможнось смешанного подключения катушек. Все области, определенные в подузле ***Domain Group***, предполагаются включенными параллельно, а узлы ***Domain Group*** включены между собой последовательно.

Большое количество электротехнических устройств содержит многовитковые обмотки с размером одного витка несопоставимо малым по сравнению с размерами геометрии, что затрудняет моделирование таких устройств из-за сложности построения сетки в них. Программа Comsol имеет модель катушек, которая позволяет моделировать такой тип обмоток, как однородную область. Наглядный пример подобной модели показан на рис. 7.8, на котором множество проводников представлены как единая область. Эта модель доступна в настройках узла ***Coil***, в строке ***Conductor model***, под названием ***Homogenized multi-turn***. В этой модели не учитывается электрическая изоляция между проводниками,

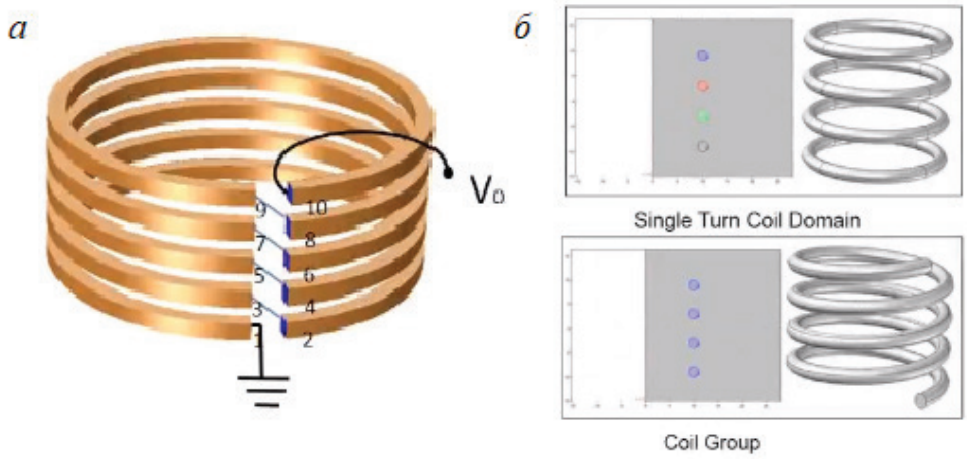


Рис. 7.7. Пример граничного условия *Connected Boundaries (а)* и условия *Coil Group (б)* [12]

гомогенность геометрии, скин-эффект. При выборе такой модели катушки добавляется вкладка в настройке узла ***Coil*** (рис. 7.9). ***Number of turns*** определяет количество витков с током в этой области. В поле ***Coil wire conductivity*** задают электропроводность проводников этой катушки. Поле ***Coil wire cross-section area*** предназначено для задания площади поперечного сечения одного проводника, если активирована опция ***User defined***, или диаметра витка проводника, если включена опция ***From round wire diameter***. Эти параметры влияют на коэффициент заполнения в катушке и, как следствие, на плотность тока.

Путь протекания тока в области пространства катушек в трехмерных задачах по расчету магнитного поля можно определить без дополнительного шага исследования (***Study***) ***Coil Geometry Analysis*** при использовании модели катушки ***Homogenized multi-turn***. В отличие от модели катушки *Single Conductor Coil*, модель ***Homogenized multi-turn*** позволяет задавать путь протекания тока с помощью пространственных объектов (элементов геометрии модели). Для этого необходимо выбрать тип катушки либо ***Linear***, либо ***Circular*** в настройке узла ***Coil***, в строке ***Coil type***. Тип катушки ***Linear*** стоит выбирать, когда путь тока будет проходить вдоль прямой линии геометрии, принадлежащей области катушки, тип ***Circular*** – для круглых катушек. Опреде-

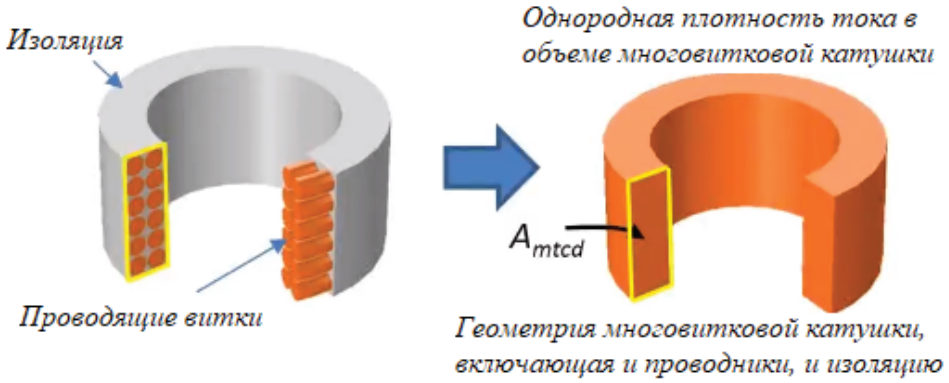


Рис. 7.8. Представление модели катушки типа *Homogenized multi-turn* [12]

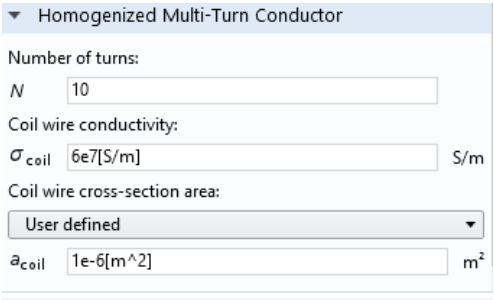


Рис. 7.9. Блок настроек многовитковой катушки

ление направляющей линии или окружности протекания тока осуществляется в подузле ***Coil Geometry***. Тип катушек ***Numeric*** предполагает расчет пути протекания тока с помощью исследования (***Study***) ***Coil Geometry Analysis***, как было написано в разделе про модель катушки *Single Conductor Coil*. Программа просчитывает направления протекания тока в области катушки в зависимости от выбранных пользователем поверхностей входа (***Input***) и выхода (***Output***) тока. Тип катушки ***User defined*** предназначен для самостоятельного задания пользователем единичных векторов, указывающих направление протекания токов. Настройка этого типа осуществляется в подузле ***User Defined Coil Geometry***.

Можно сделать краткое заключение об использовании моделей многовитковой (*Homogenized multi-turn*) и одножильной катушки (*Single conductor coil*). Когда необходимо учитывать неравномерное распределение плотности тока, вызванное резистивными и индукционными эффектами, следует выбирать тип катушки ***Single conductor coil***. Если катушка содержит множество проводников с маленькими значениями площади сечения и влияние неравномерности плотности тока катушки незначительно, следует выбирать тип катушки ***Homogenized multi-turn***.

Задача 6. Многовитковая катушка

Численно исследовать катушку с 5 витками, диаметром d витка 10 мм, расстоянием $\boldsymbol{H}$ между нижними точками витка 15 мм, длиной $\boldsymbol{L}$ катушки 70 мм, расстоянием от центра витка до оси симметрии 50 мм. Действующее значение переменного тока частотой 50 Гц равно 100 А. Проводник выполнен из меди (электропроводность – $6 \cdot 10^7$ См/м). Рассмотреть и сравнить между собой результаты, полученные с помощью разных моделей катушек ***Single Conductor*** и ***Homogenized multi-turn*** (рис. 7.10) в двухмерной постановке. Смоделировать приведенную в этой задаче катушку в трехмерной постановке.

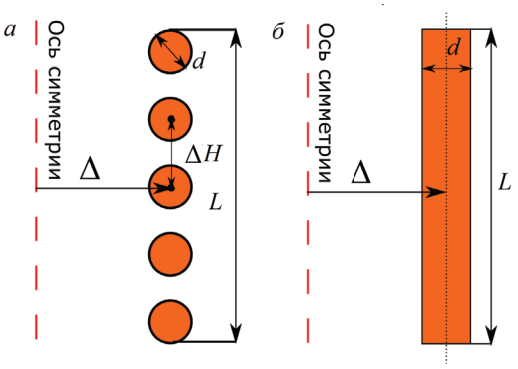


Рис. 7.10. Способы задания катушек:
а – ***Single Conductor***; *б* – ***Homogenized multi-turn***

Примечание к задаче: расчет разных моделей катушек *Single Conductor* и *Homogenized multi-turn* можно производить, создавая отдельные mph-файлы для каждой модели. Другой способ решения задачи для одного mph-файла модели заключается в отключении-подключении нужных узлов для конкретной катушки с использованием команд ***Enable*** и ***Disable***, которые доступны по нажатию правой кнопки мыши на узел дерева модели. Также можно создавать несколько компонент в одном mph-файле модели для реализации каждого типа катушек.

Создание 2D модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D Axisymmetric*** ⇒ ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Frequency Domain***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для данной задачи, например, как показано ниже. Эти параметры можно использовать в модели для задания различных величин.

Parameters

Name	Expression	Value	Description
d	10[mm]	0.01 m	диаметр витка
n	5	5	количество витков
delt_H	15[mm]	0.015 m	расстояние между витк...
L	70[mm]	0.07 m	длина катушки
delta	50[mm]	0.05 m	расстояние от оси сим...
sigma	6E7[S/m]	6E7 S/m	проводимость
I	100*sqrt(2)[A]	141.42 A	ток в катушке
f	50[Hz]	50 Hz	частота тока

3. Построим витки катушки ***Geometry*** ⇒ (***Circle***), в поле ***Radius*** вводим половину диаметра витка, в опции ***Base*** выбираем ***Corner***, в поле r вводим расстояние от катушки до оси симметрии. Далее необходимо скопировать построенный виток, для этого выполним операцию ***Geometry*** ⇒ ***Transforms*** ⇒ ***Copy***, где нужно выбрать построенный виток, а в поле z ввести ***range(delt_H, delt_H, 4*delt_H)***. Также необходимо добавить область воздуха с помощью блока, где в поле *Width* вводим 100 мм, в поле *Height* – 200 мм, а в поле z вводим −70 мм. Для задания геометрии многовитковой катушки (см. рис. 7.10, *б*) нужно создать два прямоугольника ***Rectangle*** для катушки с ее габаритными размерами ***L*** и ***d*** и для области воздуха.

4. Добавим расчет полного тока катушки ***Definitions*** ⇒ ***Component Coupling*** ⇒ ***Integration***. В окне настроек узла ***Integration*** необходимо выбрать область витков катушки либо область катушки, заданной прямоугольником, галочку напротив *Compute integral in revolved geometry* необходимо снять. Также нужно добавить ***Definitions*** ⇒ ***Variables*** и прописать переменную полного тока ***intop1(mf.Jphi)***.

5. Зададим свойства материалов ***Materials*** ⇒ ***Blank Material***, выберем построенные витки, затем введем электрическую проводимость (***Electrical conductivity***), относительную магнитную проницаемость (***Relative permeability***) равную 1 и относительную диэлектрическую проницаемость (***Relative permittivity***) также равную 1. Для воздуха во всех полях должны быть единицы.

6. Зададим ток в проводнике в физике ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Coil***. В опции ***Conductor mode*** должно быть выбрано ***Single conductor***, в ***Coil excitation*** должно быть выбрано ***Current***, а значение ***Coil current*** равно току из условия задачи. Если задается многовитковая катушка, то в опции ***Conductor mode*** должно быть выбрано ***Homogenized multi-turn***, в поле ***Number of turns*** введено количество витков катушки, а в опции ***Coil wire cross-section area*** выбрано ***From round wire diameter***, где в поле для ввода введено значение диаметра витка.

7. Рассчитаем модель ***Study*** ⇒ ***Compute***.

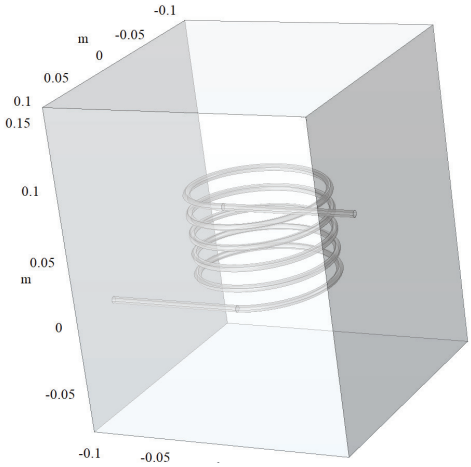
8. Рассчитаем значение полного тока. Это можно сделать с помощью ***Derived Values*** ⇒ ***Global Evaluation***, где в поле ***Expression*** необходимо ввести название переменной, содержащей значение полного тока, а также выражение ***I*n***.

Создание 3D модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***3D*** ⇒ ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Frequency Domain***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для данной задачи – это ток $I = 100$ А, $f = 50$ Гц.

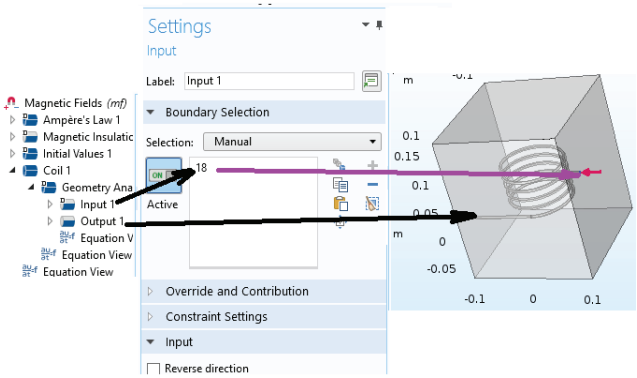
3. Импортируем геометрию ***Geometry*** ⇒ ***Import*** ⇒ ***Browse*** (выбор геометрии ***Single_ conductor. mphbin***) ⇒ ***Import*** или строим геометрию вручную, используя блок ***Helix*** с параметрами: *Number of turns* – 5, *Major radius* – 50 мм, *Minor radius* – *2.5* мм, *Axial pitch* – 15 мм. Для того чтобы концы катушек вывести на границы расчетной области, добавим две плоскости ***Work Plane***, в которые добавим круг (***Circle***) на концах катушек. Удобно для определения плоскостей на концах катушки воспользоваться опцией ***Face parallel***, которая доступна в настройках ***Work Plane***, и выбрать плоскость конца катушки в ***Planar face***. С помощью опции ***Extrude*** протянем построенные плоскости на длину достаточную, чтобы построить окружающую среду, со значениями *Distance* 100 мм и выбором направления (Reverse direction) в зависимости от требуемого для данной задачи направления. Для того чтобы построить область воздуха, создадим еще одну вспомогательную плоскость (***Work Plane*** на конце вытянутой катушки с помощью операции «прямоугольник» (***Rectangle***), размеры которого зададим таким образом, чтобы вся проекция катушки вписывалась в него. Воспользовавшись ***Extrude***, протянем данную плоскость до другого конца катушки, выбрав в окне настроек узла ***Extrude*** опцию ***Vertices to extrude to*** на вкладке ***Specify*** и определив точку на конце катушки, до которого будет выдавливание данной плоскости. Должна получиться конструкция, как на рисунке ниже.



4. Добавим расчет полного тока катушки ***Definitions*** ⇒ ***Component Coupling*** ⇒ ***Integration***. В опции ***Geometric entity level*** необходимо выбрать ***Boundary*** и определить эту переменную на грани витка. Также нужно добавить ***Definitions*** ⇒ ***Variables***, где нужно добавить переменную полного тока ***intop1(mf.Jy)***.

5. Зададим свойства материалов ***Materials***⇒ ***Blank Material***, выберем построенный виток, затем введем значение электрической проводимости (***Electrical conductivity***), относительной магнитной проницаемости (***Relative permeability***), равное 1, и значение относительной диэлектрической проницаемости (***Relative permittivity***), также равной 1. Для воздуха во всех полях должны быть единицы.

6. Зададим ток в проводнике в физике ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Coil***. В опции ***Conductor mode*** должно быть выбрано ***Single conductor***, в ***Coil excitation*** должно быть выбрано ***Current***, а значение ***Coil current*** равно току из условия задачи. Также необходимо выбрать области входа и выхода тока (рисунок ниже).



7. Прежде чем произвести расчет, необходимо добавить шаг ***Study*** ⇒ ***Study Steps*** ⇒ ***Other*** ⇒ ***Coil Geometry Analysis***, причем этот шаг должен быть первым. Далее нажимаем ***Study*** ⇒ ***Compute***.

8. Рассчитаем значение полного тока. Это можно сделать с помощью ***Derived Values*** ⇒ ***Global Evaluation***, где в поле *Expression* необходимо ввести название переменной, содержащей значение полного тока.

В некоторых задачах удобно использовать граничное условие ***Coil*** (для двухмерной задачи – грани, для трехмерной – поверхности) в случаях, когда размеры катушки имеют слишком маленькие размеры. Основные настройки узла граничного условия *Coil* такие же, как узла *Coil* для области, за одним исключением: необходимо указать толщину проводника в поле *Thickness*. Такой подход позволяет существенно снижать вычислительные мощности в процессе расчета тонких областей с током.

В некоторых задачах влияния скин-эффекта очень сильное, когда практически вся плотность тока сконцентрирована у краев проводника. В таких задачах можно воспользоваться граничным условием ***Lumped Port*** для описания токов в этих областях. Узел ***External Current Density*** удобен в тех случаях, когда известно пространственное распределение тока в проводящем элементе. Для использования подхода к моделированию катушек возбуждения магнитного поля, необходимо добавить этот узел в дерево модели и в настройках указать значения или математическое выражение плотности тока по трем координатам. В выражениях, описывающих значения плотности тока, можно использовать различные переменные, например пространственные x, y, z.

Особое внимание стоит уделить количественному описанию моделируемых катушек. После выбора типа проводника (***Conductor model***) и типа возбуждения (***Coil excitation***) для узла ***Coil***, необходимо задать значение или выражение, описывающее возбуждение катушки (напряжения, ток или мощность). В зависимости от типа исследования (***Stationary***, ***Frequency Domain*** или ***Time Dependent***) будут меняться уравнения, описывающие распространения поля, а следовательно, и режимы работы моделируемого устройства. Поэтому количественное описание катушек возбуждения также будет отличаться. Для стационарных, установившихся режимов, которые не зависят от времени, необходимо ввести вещественное значение тока (напряжения или мощности) в поле ***Coil current*** (***voltage***, ***power***). При моделировании в частотной области, считая, что величины поля в модели подчиняются гармоническому закону, токи и напряжения можно задавать в виде вещественных и комплексных чисел. Это позволяет моделировать сдвиг фаз токов, напряжений в разных катушках. Основные формулы (7.29) для записи комплексной величины (фазора) возбуждения катушки приведены на примере тока.

Модели, рассматривающие динамические режимы с помощью исследования *Time Dependent*, необходимо описывать, используя переменную времени. Например, для синусоидального тока выражение можно записать следующим образом (7.30):

$$\dot{I} = I_r + jI_{im} = I_m e^{\varphi} = I_m \left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right); \tag{7.29}$$

$$I = I_m \sin\left(\omega t + \varphi\right), \tag{7.30}$$

где $\dot{I}$ – комплексное значение тока; I_r – действительна часть тока; I_{im} – мнимая часть тока; I_m – амплитуда тока; φ – начальный сдвиг фазы; I – мгновенное значение тока; ω – угловая частота, $\omega = 2\pi f$.

Стоит понимать одну особенность при моделировании трехмерных катушек с помощью блока *Coil*. Эта особенность заключается в следующем: при наличии нескольких замкнутых контуров с током (физических катушек), определенных в одном узле *Coil*, значение тока, заданное пользователем в этом узле, будет распределяться поровну для каждого контура тока. Поэтому, при моделировании нескольких физических катушек с помощью одного узла *Coil*, необходимо значение тока увеличить в соответствии с количеством контуров или задать каждую физическую катушку в виде отдельного узла *Coil*.

7.7. Учет нелинейных свойств материалов

В предыдущих разделах были описаны физические уравнения для основных физических интерфейсов, предназначенных для расчета магнитных полей, инструменты для их настройки и возможности моделирования катушек с током. В этой части работы пойдет речь о моделях описания насыщения, потерь на гистерезис, остаточной намагниченности и ряде других физических эффектов, связанных с магнетизмом. В зависимости от используемой формулировки задачи и узлов физики в Comsol Multiphysics доступны следующие модели нелинейностей магнитного поля (табл. 7.2). В общем случае все модели описывают материальное уравнение (7.11) с разной степенью сложности и разными допущениями.

Таблица 7.2

Доступные модели нелинейностей магнитного поля
для разных формулировок задач

Модели	Задачи			
	Faraday's Law	Ampere's Law	Ampere's Law and Current Conservation	Magnetic Flux Conservation
Relative permeability	✓	✓	✓	✓
Magnetic losses	✓	✓	✓	✓
BH-curve	✓	✓	✓	✓
Effective BH-curve	✓	✓	✓	—
Remanent flux density	✓	✓	✓	✓
Magnetization	✓	✓	✓	✓
BH-nonlinear permanent magnet	—	✓	—	✓
Hysteresis Jiles-Atherton model	—	✓	—	✓

Relative permeability – относительная магнитная проницаемость. Эта модель предназначена для связи магнитной индукции с магнитной напряженностью поля при помощи вещественного значения относительной проницаемости (рис. 7.11, *а*). Относительная магнитная проницаемость может быть, например, как скалярным значением, так и функцией в зависимости от температуры или магнитной индукции. Эту модель можно применять для динамического, гармонического и стационарного исследований.

Модель магнитной нелинейности *Magnetic losses* представляет подход к моделированию магнитных потерь на гистерезис с помощью вещественных и мнимых значений магнитной проницаемости (рис. 7.11, *б*). Эта модель магнитной нелинейности используется при решении только в частотной области (*Frequency Domain*).

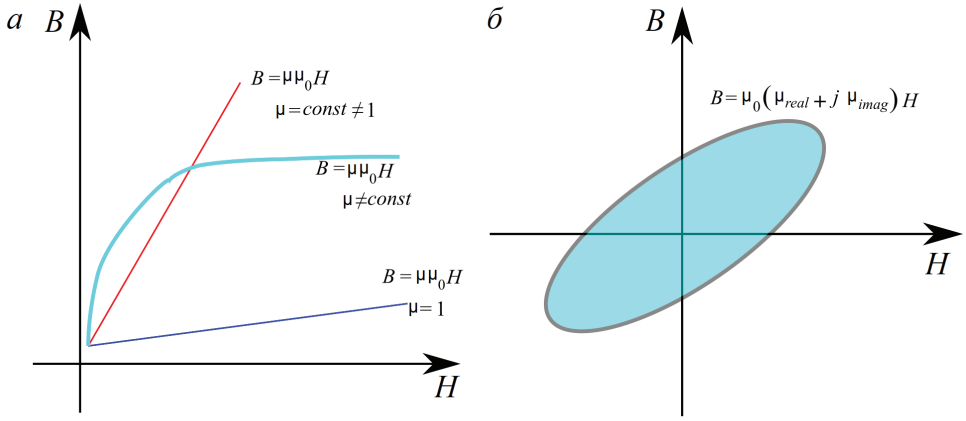


Рис. 7.11. Кривые *B-H* с использованием моделей *Relative permeability* (*а*) и *Magnetic losses*(*б*)

Модель *BH-curve* используется для моделирования насыщения ферромагнитных областей пространства без учета потерь на гистерезис. Для этой модели необходимо описать кривую $B(H)$ (рис. 7.12) или взять из библиотеки материалов Comsol. В данной модели не учитываются потери на гистерезис.

Модель *Effective BH-curve* является аналогом модели *BH-curve*, но предназначена только для расчета задач частотной области (*Frequency domain*). Стоит отметить, что $B_{eff}(H)$ имеет завышенные значения по сравнению с реальной кривой намагничивания (рис. 7.12). Такой подход позволяет улучшить сходимость задачи [26, 12]. Для корректного задания эффективной кривой насыщения $B_{eff}(H)$ в этой модели можно воспользоваться приложением в библиотеке Comsol *Effective Nonlinear Magnetic Curves Calculation*. В этом приложении необходимо задать стандартную кривую насыщения моделируемого участка, и приложение пересчитает ее в эффективную кривую насыщения. Другой способ получения

эффективной кривой насыщения – это самостоятельно воспользоваться формулами пересчета, приведенными в работах [26, 12].

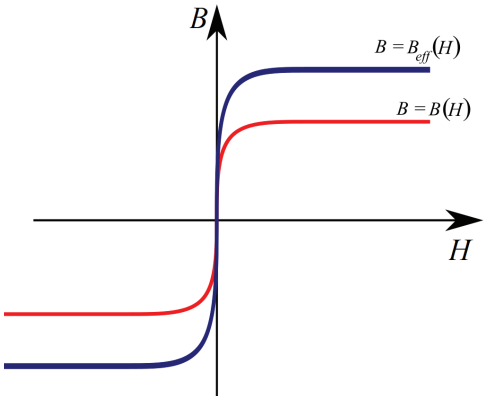


Рис. 7.12. Кривые *B-H* с использованием моделей *BH-curve* и *Effective BH-curve*

Модель намагниченности (*Magnetization*) описывает остаточную намагниченность **M**, приведенную в уравнении (7.11), (рис. 7.13). Она хорошо подходит для описания редкоземельных постоянных магнитов. Чтобы реализовать эту модель, необходимо знать значение вектора намагниченности в выбранной области.

С помощью модели остаточной магнитной индукции (*Remanent Flux Density*) можно описывать эффект размагничивания или создавать магнитное поле после отключения внешнего магнитного поля (рис. 7.13). В описании этой модели участвует одна скалярная (или тензорная) и одна векторная величина. Скалярная величина – это относительная магнитная проницаемость, а векторная – это остаточная магнитная индукция при нулевом значении внешнего поля.

Моделирование нелинейных постоянных магнитов можно реализовать с помощью модели *B-H Nonlinear Permanent Magnet*. Модель описывается с помошью функции зависимости напряженности магнитного поля от магнитной индукции и направляющего единичного вектора (рис. 7.14, *а*). Таким образом можно моделировать размагничивание постоянных магнитов. Стоит отметить, что эта модель позволяет учитывать насыщение, а также остаточную намагничиваемость.

Моделью, наиболее полно описывающей явления насыщения и поте-

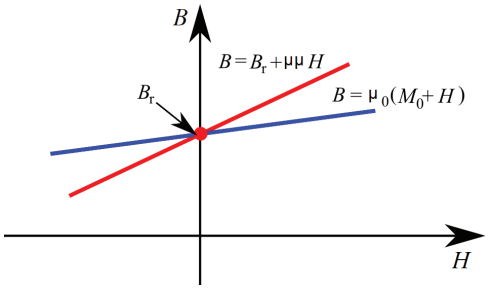


Рис. 7.13. Кривые *B-H*, построенные с использованием моделей *Magnetization* и *Remanent Flux Density*

ри на гистерезис, является модель Джилса–Атертона (рис. 7.14, *б*). Она содержит 5 скалярных величин и одну векторную. Решение этой модели возможно только с помощью временных решателей. Настройка модели *Hysteresis Jiles-Atherton* является нетривиальной задачей и выходит за рамки этой работы [27].

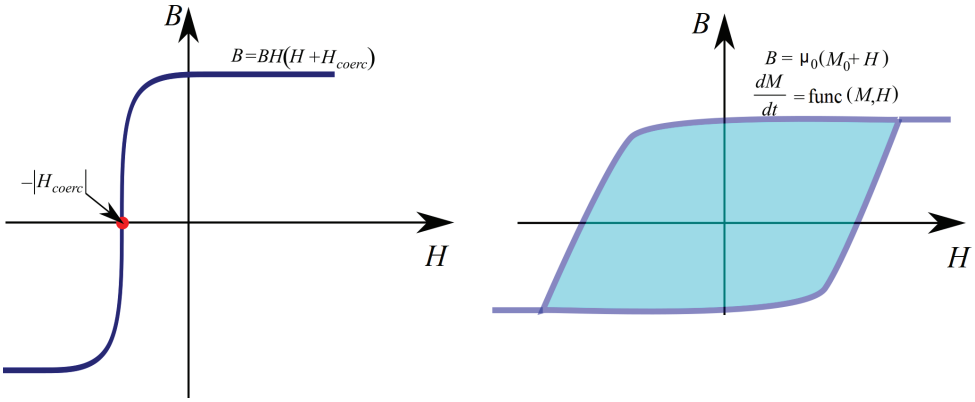


Рис. 7.14. Кривые *B-H*, построенные с помощью модели *BH-curve* (*а*) и *Effective BH-curve* (*б*)

Задача 7. Магнитная сборка Халбаха

Постоянные магниты изготовлены из сплава альнико. Электропроводность магнитов – $1.33 \cdot 10^6$ См/м. Электропроводность стали – $7.69 \cdot 10^6$ См/м. Относительная магнитная проницаемость сплава альнико и стали – 1 и 100 соответственно. Коэрцитивная сила магнитов – 147 218 А/м (направление силы для магнитов показано на рис. 7.15). Размеры каждого магнита – 10 х 10 мм, размер стальных полос – 50 х 5 мм, расстояние между магнитами и сталью – 5 мм. Необходимо рассчитать картину поля постоянных магнитов (рис. 7.15) и определить средние значения магнитной индукции в стали, расположенной сверху и снизу от магнитов.

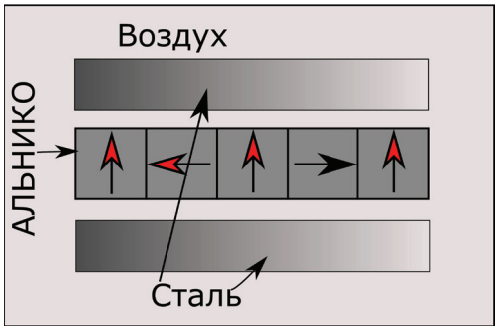


Рис. 7.15. Схема сборки постоянных магнитов

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Field*** ⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже.

Name	Expression	Value	Description
Hc	-147218[A/m]	-1.4722E5 A/m	
mu0	4E-7*pi	1.2566E-6	
sigmaSteel	7.69E6	7.69E6	
muSteel	100	100	
sigmaMa...	1.33E6	1.33E6	
muMagnet	1	1	

3. В узле ***Geometry*** создаем модель (см. рис. 7.15), используя прямоугольники (***Rectangle***) и квадраты (***Square***). Для создания одинаковых квадратов можно использовать блок ***Copy***, в котором выбираем необходимую область и, через запятую, задаем сдвиг по оси x для каждого квадрата (например, если сторона квадрата **a**, то в параметре x задаем **a,2*a,3*a,4*a**).

4. Добавим в узле ***Materials*** материал ***Air*** из библиотеки материалов (расположен в библиотеке ***Liquids and Gases/Gases***) и два подузла ***Blank Model***. Первому подузлу будет соответствовать сталь, второму – сплав альнико. Зададим электрические свойства материалов, используя величины, заданные в узле ***Parameters***.

5. В настройке физического интерфейса ***Magnetic Fields*** необходимо задать коэрцитивную силу, действующую на магниты. Для этого добавим пять узлов ***Ampère's Law***. Для каждого узла определим область соответствующего ему магнита и изменим в настройках узла модель нелинейности (***Magnetization model***) на ***Magnetization***. После этого, в зависимости от выбранного магнита, зададим коэрцитивную силу по координатам x и y, составляющую величину **M**, как **Hc** или **–Hc** в зависимости от ориентации магнита в пространстве.

6. Запускаем решение исследования (***Compute***).

7. Для получения картины магнитного поля используем блок ***2D Plot group***, добавив в него ***Surface***. В узле ***Expression*** нужно написать: ***mf.normB***. Для определения среднего значения магнитной индукции необходимо в узле ***Derived Values*** добавить два блока ***Surface Average***, выбрать в каждом область стали и добавить в поле ***Expression mf.normB***, нажать ***Evaluate***.

Задача 8. Линейные магниты

Постоянные магниты изготовлены из сплава альнико. Электропроводность магнитов – $1.33 \cdot 10^6$ См/м. Электропроводность стали составляет $7.69 \cdot 10^6$ См/м. Относительная магнитная проницаемость сплава альнико и стали – 1 и 100 соответственно. Коэрцитивная сила магнитов – 147 218 А/м (для левого магнита сила направлена вверх, для правого – вниз). Необходимо рассчитать картину поля постоянных магнитов и определить максимальное значение магнитной индукции.

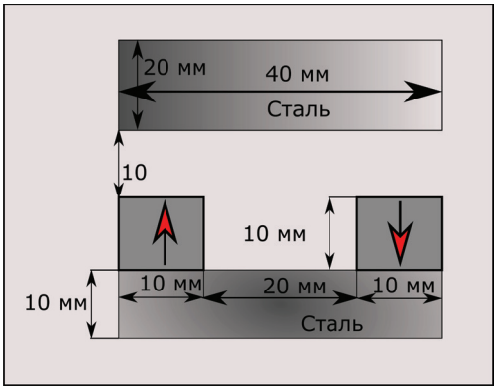


Рис. 7.16. Конструкция устройства с постоянными магнитами

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Field*** ⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже.

Name	Expression	Value	Description
Hc	-147218[A/m]	-1.4722E5 A/m	
mu0	4E-7*pi	1.2566E-6	
sigmaSteel	7.69E6	7.69E6	
muSteel	100	100	
sigmaMa...	1.33E6	1.33E6	
muMagnet	1	1	

3. Используя прямоугольники (***Rectangle***), в узле ***Geometry*** создаем модель, показанную на рис. 7.16.

4. Добавим в узле ***Materials*** материал ***Air*** из библиотеки материалов (расположен в библиотеке ***Liquids and Gases/Gases***) и два подузла ***Blank Model***. Первому подузлу будет соответствовать сталь, второму – сплав альнико. Зададим электрические свойства материалов, используя величины, заданные в узле ***Parameters***.

5. В настройке физического интерфейса ***Magnetic Fields*** необходимо задать коэрцитивную силу, действующую на магниты. Это можно сделать двумя способами:

   - добавить два блока ***Surface Current***. В первом блоке необходимо выбрать левую границу левого магнита и правую границу правого магнита. В настройках изменяем в параметре *Surface current density* (**Js0**) z-составляющую на **Hc**. Во втором блоке необходимо выбрать правую границу левого магнита и левую границу правого магнита. В настройках изменяем в параметре *Surface current* density (**Js0**) z-составляющую на **–Hc**;
   - добавить два блока ***Ampère's Law***. В первом блоке выбрать область левого магнита и изменить значение ***Constitutive relation*** в параметре ***Magnetic Field*** на ***Magnetization***. Заменим y-составляющую величины **M** на **Hc**. Во втором блоке выбрать область правого магнита и изменить значение ***Constitutive relation*** в параметре ***Magnetic Field*** на ***Magnetization***. Заменим y-составляющую величины **M** на **–Hc**.

6. Запускаем решение исследования (***Compute***).

7. Для получения картины магнитного поля используем блок ***2D Plot group***, добавив в него ***Surface***. В узле ***Expression*** нужно записать ***mf.normB***. Для определения среднего значения магнитной индукции необходимо в узле ***Derived Values*** добавить два блока ***Surface Average***, выбрать в каждом область стали и добавить в поле ***Expression mf.normB***, нажать ***Evaluate***.

7.8. Учет движения проводящих элементов

В мире существует множество электротехнических устройств, принцип которых основан на движении проводящего элемента в магнитном поле. Поэтому инженеры часто встречаются с проблемой корректного учета дополнительных плотностей тока, вызванных движением проводящей среды в магнитном поле согласно уравнению (7.10). Такие явления можно встретить в линейных электрических машинах, МГД-насосах, магнитном перемешивании расплавов и множестве других преобразователях энергии. Для описания этого, в Comsol Multiphysics для двухмерных и трехмерных задач в физических интерфейсах ***Magnetic Fields***, ***Magnetic field formulation***, ***Magnetic and electric fields*** реализован узел *Velocity (Lorentz Term)*. Исключением является интерфейс ***Magnetic Fields*** в трехмерной постановке задачи. *Velocity (Lorentz Term)* описывается как сумма уравнений (7.7) и (7.8), если пренебрегать токами смещения,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_i + \sigma \left[\mathbf{v} \times \mathbf{B} \right].$$

В некоторых задачах член уравнения, учитывающий скорость перемещения проводящей среды в магнитном поле, можно самостоятельно дописать для трехмерной задачи ***Magnetic Fields*** интерфейса. Для этого создадим дополнительный узел в физике ***Magnetic Fields Ampere's Law*** и определим его для движущейся области. Если включена опция ***Equation View*** в дереве модели, позволяющая редактировать и смотреть уравнения, описывающие физические узлы модели, можно дописать в дочернем узле ***Equation View*** для величин ***External electric field*** (обозначаются как «**mf.Eelx**», «**mf.Eely**», «**mf.Eelz**)» выражения **mf.Bz*Vy — mf.By*Vz** для x-компоненты, **-mf.Bz*Vx + mf.Bx*Vz** для y-компоненты и **mf.By*Vx — mf.Bx*Vy**

для z-компоненты. Переменные **V**x, **Vy**, **Vz** обозначают значения скорости каждой из координат.

7.9. *Electric Currents*

Electric Currents – физический интерфейс – предназначен для расчета электрического поля, токов и распределения скалярного магнитного потенциала с помощью уравнения сохранения тока (7.31) и уравнение для скалярного электрического потенциала (7.32) как частный случай ***Magnetic and electric fields*** интерфейса. Основным назначением этого физического интерфейса является расчет пути протекания электрического тока в проводящей среде с учетом резистивных элементов. В таких моделях не учитываются индуктивные явления.

Опишем основные узлы физического интерфейса ***Electric Currents***, которые требуются при моделировании электротехнологических устройств.

$$div\mathbf{J} = Q, \tag{7.31}$$

где Q – объемная плотность заряда.

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \tag{7.32}$$

Current Conservation – главный узел этой модели, который описывает уравнение (7.32). Граничное условие ***Electric Insulation*** предназначено для задания условия $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$ на границах расчетной области.

Current Source позволяет рассчитать вектор плотности тока исходя из заданной пользователем объемной плотности тока $Q_{i,v}$ в этом узле для выбранной области. Терминальный (***Terminal***) узел обеспечивает граничное или доменное условие для подключения к внешним цепям, к линиям передачи, а также с указанным напряжением или током. Задавая нулевой ток, получаем условие плавающего потенциала

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = Q_{j,v}.$$

Стоит отметить граничные условия, с помощью которых можно задать разность потенциалов на границах и, как следствие, вызвать протекание токов. Граничное условие ***Electric Potential*** задает значение потенциала на выбранной границе, частным случаем является его узел

Ground, который определяет нулевой потенциал на выбранной границе. Удобно использовать граничное условие плавающего потенциала (***Floating potential***) при моделировании электродов. Значение электрического потенциала на границе, для которой определено граничное условие ***Floating potential***, будет зависеть от значений электрического потенциала на соседних границах. Можно привести пример: моделируют три электрода – на двух изначально задано граничное условие первого рода (определены значения потенциалов), на третьем, на котором задано граничное условие плавающего потенциала, будет определен потенциал в зависимости от значений тока, который является результатом действия двух других электродов. С помощью задания параметров в поле *Current* можно описать ток, который подводится источником, но результирующий ток будет зависеть от рассчитанного потенциала на их границах. Также можно смоделировать подвод внешнего тока с помощью граничных условий ***Norman Current Density***, который определяет значение нормального тока к выбранной границе, и ***Boundary Current Density***, который позволяет вычислить векторы токов на заданной границе исходя из заданного значения объемной плотности тока.

В некоторых задачах требуется смоделировать изменение величины и направления вектора тока в областях с резко изменяющимися значениями среды (контактные соединения, утечки). Для этого удобно использовать узлы ***Electric Shielding***, ***Electrical Contact***, ***Distributed Impedance***, ***Contact Impedance***. Узел ***Electrical Shielding*** предназначен для моделирования электрического экрана. Его можно использовать при необходимости описать тонкий слой высокопроводящей среды, которая экранирует электрическое поле. Узел ***Distributed Impedance*** описывается уравнением (7.33). С помощью данного граничного условия можно смоделировать резкое изменение нормального направления тока к выбранной границе в зависимости от заданного пользователем значения напряжения V_{ref}, ширины слоя d_s и ее электропроводности $\boldsymbol{\sigma}$. Моделирование контактного сопротивления без учета сил нажатия можно произвести с помощью узла ***Contact Impedance***. Узел ***Electrical Contact*** – это более продвинутый инструмент для моделирования контактного сопротивления, чем *Contact Impedance*, позволяющий учитывать силу нажатия в месте контакта

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{d_s} \left(V - V_{ref} \right) . \tag{7.33}$$

Задача 9. Расчет емкости многожильного провода

Сечение рассчитываемого кабеля представлено на рис. 7.17. Линейное напряжение составляет 220 кВ. Жилы кабеля выполнены из меди. Электропроводность изоляции составляют 10^6 См/м. Относительная диэлектрическая проницаемость изоляции равна 1. Рассчитать распределение электрического потенциала по сечению провода и определить значение емкостной характеристики.

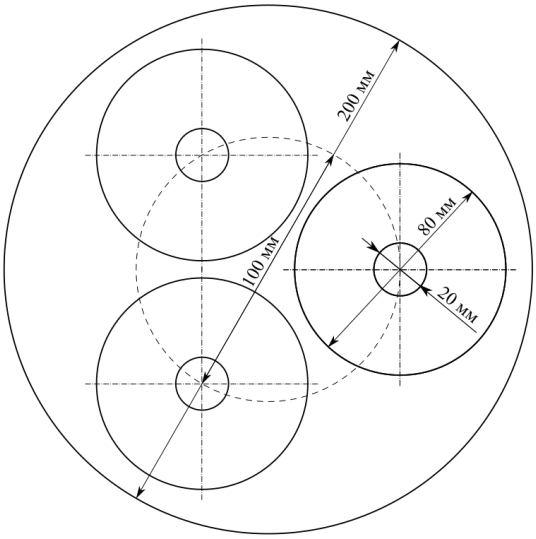


Рис. 7.17. Основные размеры многожильного провода

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Electric Currents*** ⇒ ***Frequency Domain***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже.

Name	Expression	Value	Description
R1	0.015[m]	0.015 m	
R2	0.04[m]	0.04 m	
R3	0.1[m]	0.1 m	
a	0.008[m]	0.008 m	
V1	220[kV]/sqrt(3)	1.2702E5 V	
V2	V1*exp(-2/3*pi*j)	(-63509-1.1E5i...	
V3	V1*exp(2/3*pi*j)	(-63509+1.1E5...	
sigma_ins	1E-14[S/m]	1E-14 S/m	
epsr_ins	1	1	

3. Используя круги (***Circle***), в узле ***Geometry*** создаем модель, показанную на рис. 7.17. Для упрощения построения можно использовать функцию *Rotate*, которая позволяет повернуть круги, соответствующие одной из фаз, вокруг оси симметрии кабеля.

4. Добавим в узле ***Materials*** материал *Copper* из библиотеки материалов (расположен в библиотеке ***AC/DC***) и подузел *Blank Model*, которому соответствует материал изоляции. Зададим электрические свойства изоляции, используя величины, заданные в узле ***Parameters***.

5. В настройке физического интерфейса ***Electric Currents*** необходимо задать напряжения фаз и изоляции (в данной задаче принимаем, что напряжение изоляции неизменно и равно нулю). Это можно сделать посредством блоков ***Terminal***, в каждом из которых необходимо выбрать область, для которой задается напряжение, во вкладке ***Terminal*** изменить параметр ***Terminal type*** на ***Voltage***, после чего задать соответствующее значение напряжения, вводя, например, значение параметров **V1**, **V2**, **V3**, а для изоляции – значение 0.

6. В узле ***Study***, в параметрах ***Frequency Domain***, добавляем частоту 50 Гц.

7. Запускаем решение исследования ***Compute***.

8. Для получения картины электрического потенциала используем блок ***2D Plot group***, добавив в него ***Surface***. В узле *Expression* нужно записать *V*. Также для наглядности можно добавить параметр *Height Expression* для блока ***Surface***. Для определения значения емкостной характеристики необходимо в узле ***Derived Values***

добавить блок ***Global Evaluation***, после чего ввести выражение ***(imag(ec.Y11)/ec.omega)/1[m].*** в поле *Expression*. Рекомендуется проверить вычисления аналитическим путем, используя следующую формулу:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(R_2/R_1)},$$

где ε_0 и ε_r – абсолютная и относительная диэлектрическая проницаемость; R_2 – внешний радиус провода; R_1 – внутренний радиус провода.

7.10. *Electrostatic*

Физический интерфейс ***Electrostatic*** предназначен для вычисления статических электрических полей с заранее предписанными распределениями зарядов. В основе этого модуля лежит закон Гаусса (7.4) и уравнение (7.32). Расчет ведется относительно скалярного электрического потенциала. Исследования являются стационарными, но в связке с другими интерфейсами могут встраиваться и в анализ динамических режимов. Примерами объектов, которые можно моделировать при помощи данного физического интерфейса, являются электрические конденсаторы, устройства диэлектрического нагрева, электрические сепараторы и множество других устройств.

Charge Conservation – узел для описания уравнений (7.4) и (7.32). Этот узел является основным для расчета статического электрического поля. Граничным условием на расчетной области является ***Zero Charge***, которое определяет нулевое значения нормального вектора электрической индукции ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$). Скалярное распределение плотности заряда можно задать в узле ***Space Charge Density*** для выбранной области. Узел ***Termianl*** является аналогом этого же узла, описанного в разделе ***Electrostatic***, только задается заряд для этой области. Распределение заряда можно также определить с помощью граничных условий ***Surface Charge Density***.

Многие граничные условия являются идентичными тому, как описывалось в вышеупомянутых физических интерфейсах, а их часть аналогична им и в использовании. Например, ***Distributed Capacitance*** описывает резкое изменение электрической индуктивности на выбран-

ной границе. Это граничное условие представляет собой тонкий диэлектрический слой. ***Electric Displacement Field*** позволяет задать значение нормального вектора электрической индукции поля на границе. Диэлектрическое экранирование можно реализовать с помощью узла ***Dielectric Shielding***. Аккумулируемый заряд на одной из стенок можно смоделировать на основе граничного условия ***External Surface Charge accumulation***. Это условие определяет количество аккумулируемого заряда на выбранной границе на основе значений электрического поля и нормальных векторов входного и выходного полного тока через поверхность, на которой определено это граничное условие. Узкие зоны с диэлектриком удобно моделировать с помощью граничного узла ***Thin Low Permittivity Gap***.

7.11. *Electrical Circuit*

Electrical Circuit – физический модуль, служащий для расчета электрический цепей, позволяет задавать напряжение (ток) в узлах ***Coil*** с помощью внешней цепи (сосредоточенных параметров) для модулей раздела ***AC/DC***, например можно определять формы питающего тока какой-либо электромеханической или электротехнологической установки с учетом особенностей соединений электрической цепи на основе законов Кирхгофа. Физический интерфейс ***Electrical Circuit*** рассчитывает токи, напряжения, а если быть точнее – значения потенциалов относительно заданного нулевого потенциала «земля», производные токов и параметры состояний элементов цепи, например включения или отключения части элементов или элемента цепи.

Интерфейс содержит рабочую ленту (рис. 7.18). Как можно заметить, набор доступных элементов в интерфейсе ***Electrical Circuit*** довольно обширный. Рассмотрим ряд основных элементов, поскольку принципиальный смысл конструирования электрических цепей с другими элементами остается тем же.

Узел ***Ground*** – это точка, в которой принимается нулевое значение потенциала. Окно настройки узла показано на рис. 7.19. В окне настроек необходимо ввести имя узла (***Node name***). Оно будет необходимо для описания соединений других элементов с этим узлом. Имя может содержать как латинские буквы, так и цифры.

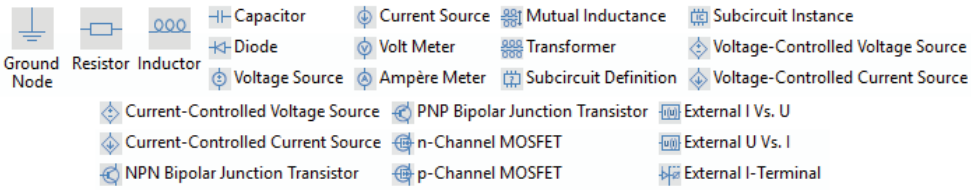


Рис. 7.18. Панель интерфейса ***Electrical Circuit***

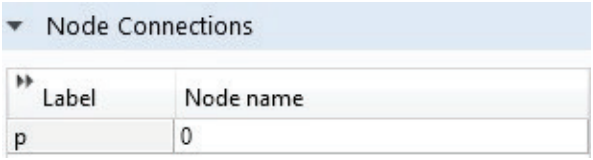


Рис. 7.19. Настройки узла ***Ground***

На практике можно встроить много задач, когда необходимо учитывать падение напряжения на подводящих линиях от источника питания к установке или дополнительное тепловыделение в лобовых частях обмоток электрических машин. Анализ этих явлений в полевых задачах (как частный случай метода конечных элементов) является в большинстве случаев избыточным подходом, а в некоторых ситуациях и вовсе невозможным. Для решения подобного типа задач можно воспользоваться физическим модулем ***Electrical Circuit***. Разберем, как работает модуль ***Electrical Circuit*** на примере трех элементов электрической цепи: ***Resistor*** (резистор), ***Capacitor*** (конденсатор) и ***Inductor*** (индуктор). Настройка этих узлов идентична друг другу, за исключением определения значений параметра элемента. Сначала необходимо дать название входному (p) и выходному (n) узлам или присвоить уже существующее имя узла в другом элементе, что будет обозначать соединение этих узлов. Например, если мы в поле ***Node Connections*** (рис. 7.20) введем для ***Resistor*** и ***Ground*** название узла «0» для узла p, а в поле n введем «9» так же, как для ***Capacitor***, то это будет означать, что начальный конец резистора соединен с землей, а конец – с началом конденсатора. На этом принципе строятся электрические схемы в интерфейсе ***Electrical Circuit***. В окне настроек, вкладка ***Figure***, представлен рисунок, который отображает положительное протекание токов (начало и конец элемента). В поле ***Device Parameters*** вводятся значения пара-

метров элементов (сопротивление, емкость, индуктивность и т. д.). Для емкости можно дополнительно ввести начальное емкостное напряжение (остаточное напряжение), а для индуктивности – начальный ток (ток намагничивания). Это позволяет в некоторых случаях более корректно рассматривать переходные процессы в цепи.

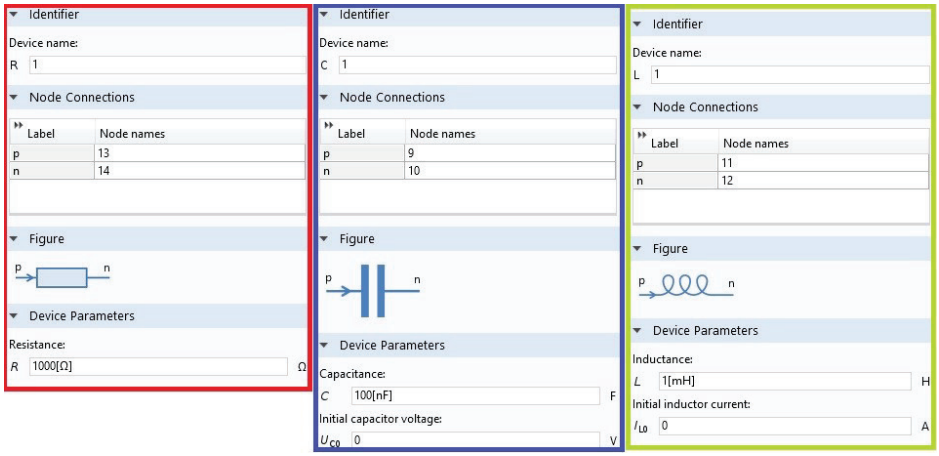


Рис. 7.20. Окна настроек узлов *Resistor* (в красной рамке), *Capacitor* (синей рамке) и *Inductor* (зеленой рамке)

Следующие важные элементы для построения схем – это источники напряжения (***Voltage Source***) и тока (***Current Source***). Данные элементы служат для формирования сигнала или значения питающего тока (напряжения). Как и у элементов, представленных выше (резистор, конденсатор и индуктор), данные элементы содержат два узла: вход p и выход n, которым необходимо присвоить имена или присоединить уже к существующим узлам, задав имя узла другого элемента. На вкладке ***Device Parameters*** можно определить тип и параметры источника. В интерфейсе ***Electrical Circuit*** реализованы следующие типы источников: ***DC-source*** – сигнал, не зависящий от переменной; ***AC-source*** – гармонический сигнал в комплексной форме (фазор); ***Sine source*** – синусоидальный сигнал, зависящий от переменной времени; и ***Pulse source*** – кривая импульса от переменной времени. Параметры источника для формирования требуемого сигнала определяются в зависимости от типа выбранного источника, например: амплитуда, сдвиг фазы и т. д. Настройка и задание параметров источника реализована

в интерфейсе ***Electrical Circuit*** на интуитивном уровне, поэтому их описание опустим.

Примечание: в интерфейсе ***Electrical Circuit*** необходимо использовать модель источника напряжения Тевенина или альтернативную ей модель источника тока Нортона. Модель Тевенина содержит источник ЭДС, соединенный последовательно с малым сопротивлением. Модель источника тока Нортона включает источник тока, соединенный параллельно с очень большим сопротивлением.

Моделируемые электрические цепи в интерфейсе ***Electrical Circuit*** будут внешними по отношению к полевой задаче, реализуемые, например, с помощью интерфейса ***Magnetic Fields*** как самого распространенного из модулей ***AC/DC***, поскольку в данном случае источник магнитного поля (катушки) не связан с электрической цепью. При моделировании источника тока (напряжения) в полевой задаче, с помощью узла ***Coil*** его можно связать с внешней цепью, построенной в интерфейсе ***Electrical Circuit***. Для этого необходимо в настройках узла ***Coil***, на вкладке ***Coil excitation*** (возбуждение катушек), выбрать настройку внешнего вобуждения ***Circuit (voltage)*** или ***Circuit (current)***. Такая настройка узла ***Coil*** указывает, что значения напряжения (тока) для этой катушки будут браться из внешней цепи ***Electrical Circuit***. Для этого необходимо обозначить данную катушку в электрической цепи физического интерфейса ***Electrical Circuit*** с помощью элемента цепи ***External I Vs. U***, если выбрать в настройках узла ***Coil*** тип возбуждающей катушки ***Circuit (current)*** или ***External U Vs. I*** для ***Circuit (voltage)***. Элементы ***External I Vs. U*** и ***External U Vs. I*** имеют один узел входа и один узел выхода для соединения с другими элементами цепи. Установить, какому узлу *Coil* в интерфейсе ***Magnetic Fields*** будет соответствовать элемент цепи ***External I Vs. U*** (или ***External U Vs. I***), можно в окне настроек данного элемента, на вкладке ***External Device***, выбрав требуемую подходящую катушку из списка доступных. После выполнения вышеупомянутых настроек, на катушку будет поступать сигнал тока (напряжения) в физическом интерфейсе ***Magnetic Fields***, рассчитанный в цепи ***Electrical Circuit*** на участке элемента ***External I Vs. U*** (***External U Vs. I***) и выбранный для этой катушки. Элементы цепи ***External I Vs. U*** и ***External U Vs. I*** для интерфейса ***Electrical Circuit*** рассматриваются как нелинейные источники тока или напряжения со значением, полученным в ***Magnetic***

Fields. Таким образом, электромагнитные процессы, моделируемые в ***Magnetic Fields***, косвенно влияют на расчет внешней электрической цепи интерфейса ***Electrical Circuit***.

Разберем на примере однофазного трансформатора принцип взаимодействия интерфейсов ***Electrical Circuit*** и ***Magnetic Fields***. Однофазный трансформатор в некотором приближении можно представить как две многовитковые катушки, которые можно смоделировать в виде двух узлов *Coil* в интерфейсе ***Magnetic Fields***, в которых тип возбуждения является источником напряжения внешней цепи *Circuit (voltage)*. Каждая катушка представляет собой элемент цепи ***External U Vs. I*** в интерфейсе ***Electrical Circuit***. Одна из катушек подключена к источнику напряжения ***Voltage Source*** и небольшому сопротивлению ***Resistor***, а вторая – к нагрузке, характеризующейся элементом ***Resistor***. В таком случае к первой катушке будет приложено напряжение, рассчитанное в цепи интерфейса ***Electrical Circuit***, а элемент ***External U Vs. I*** будет в цепи источником тока со значением тока, рассчитанным в ***Magnetic Fields***. Во второй катушке возникнет индуцированный ток, значение которого будет параметром источника тока во внешней цепи. В свою очередь вторая катушка наведет индуцированные токи в первичной, что приведет к изменению значения источника тока во внешней цепи и, как следствие, к изменению напряжения питания первичной катушки. Этот процесс остановится, если значение тока источника во внешней цепи совпадет со значением тока, рассчитанным в ***Magnetic Fields*** (рис. 7.21).

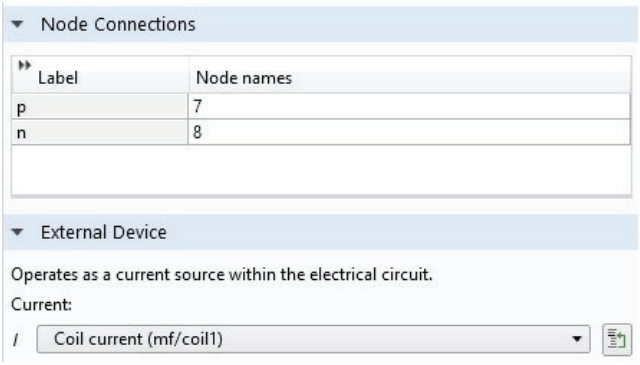


Рис. 7.21. Окно настроек узла ***External I Vs. U***

Подводя итоги, отметим, что основным принципом построения внешней электрической цепи в Comsol является определение названий узлов. Если узлы имеют одинаковое название, они включены в один узел. Все величины рассчитываются относительно нулевого потенциала (земли). Также цепь обязательно должна быть замкнута.

Задача 10. Расчет падения напряжения в ЛЭП

Определить потери напряжения в воздушной линии трехфазного тока 110 кВ длиной 50 км, по которой потребитель получает питание мощностью 16 МВ·А при $\cos\varphi = 0.85$. Линия выполнена из сталеалюминевых проводов марки АС-70/11, расположенных горизонтально, с расстоянием между ними 4 м. При расчете емкость не учитывать. Обозначение АС-70/11 расшифровывается как: А – алюминий; С – сталь; 70/11 – площадь сечения алюминиевой жилы 70 мм^2, площадь сечения стальной жилы 11 мм^2. Удельная проводимость алюминия и стали будет соответственно $\sigma_{\mathrm{Al}} = 3.7 \cdot 10^7$ См/м, $\sigma_{\mathrm{St}} = 7.69 \cdot 10^6$ См/м. Расчет параметров нагрузки осуществляется по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{S_{\text{н}}}{\sqrt{3}U_{\text{Л}}};\\
Z &= \frac{U_{\text{л}} \cdot e^{\frac{j\varphi\pi}{180}}}{\sqrt{3}I};\\
R &= \mathrm{Re}(Z);\\
L &= \frac{\mathrm{Im}(Z)}{2\pi f},
\end{aligned}
$$

где I – расчетный фазный ток; $S_{\text{н}}$ – мощность нагрузки; Z – полное сопротивление нагрузки; $U_{\text{Л}}$ – номинальное напряжение линии; R – активное сопротивление нагрузки; L – индуктивность нагрузки.

Поскольку провода разных фаз удалены друг от друга достаточно далеко, то достаточно рассчитать лишь одну фазу.

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Frequency Domain***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи.

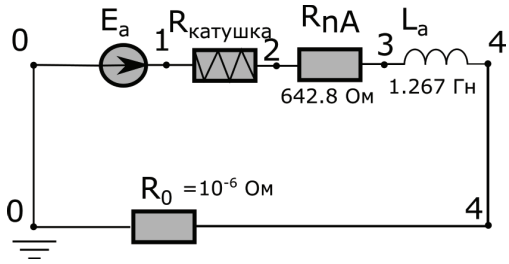
3. Построим ***Geometry***. Для этого нужно построить две окружности (***Circle***) с радиусами 0.001 87 и 0.005 8 м, далее построить воздух с помощью прямоугольника (***Rectangle***), выбрать опцию ***Base Center***; ширина (***Width***) и высота (***Height***) прямоугольника должны быть 0.4 м.

4. Зададим свойства материалов ***Materials*** ⇒ ***Blank Material***, выберем области проводов в зависимости от их материалов, затем введем электрическую проводимость (***Electrical conductivity***). Значения относительной магнитной проницаемости (***Relative permeability***) и относительной диэлектрической проницаемости (***Relative permittivity***) равны 1. Для воздуха во всех полях должны быть единицы.

5. Зададим значение длины линии ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Settings*** ⇒ ***Thickness***, где в поле *Out-of-plane thickness* вводим значение длины линии.

6. Зададим ток в проводнике в физике ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Coil***. В опции ***Conductor mode*** должно быть выбрано ***Single conductor***, в ***Coil excitation*** должно быть выбрано ***Circuit (current)***.

7. Добавим электрическую цепь ***Electrical Circuit*** ⇒ ***Import SPICE Netlist*** ⇒ ***Circuit.cir***. Данная электрическая цепь является неполной, необходимо добавить линию электропередач с помощью ***Electrical Circuit*** ⇒ ***External I Vs. U***, где в *Node Connections* необходимо вписать номера узлов подключения p и n для – 1, 2. В ***External Device***, в опции ***Electrical potential***, нужно выбрать ***Coil Voltage***. Можно собрать схему самостоятельно, как показано на рисунке ниже.



8. Прежде чем произвести расчет, нужно ввести значение частоты сети ***Frequency-Domain*** $\Rightarrow$ ***Study Settings*** $\Rightarrow$ ***Frequencies*** $\Rightarrow$ **50 Гц**. Далее нажать ***Compute***.

9. Расчет значения падения напряжения на линии можно сделать с помощью ***Derived Values*** $\Rightarrow$ ***Global Evaluation***, где в поле *Expression* необходимо ввести ***mf.VCoil_1***, также можно рассчитать полное сопротивление катушки, введя ***mf.ZCoil_1***.

10. Построим распределение плотности тока по сечению провода. Это можно сделать с помощью ***Derived Values*** $\Rightarrow$ ***2D Plot Group*** $\Rightarrow$ ***Surface*** $\Rightarrow$ ***Selection***, где нужно выбрать область провода, а в ***Surface***, в поле ***Expression***, необходимо ввести ***mf.Jz***.

7.12. Расчет усилий

Часто у разработчиков, инженеров или ученых возникает проблема точного расчета электромагнитных усилий, поэтому стоит рассмотреть различные подходы к вычислению электромагнитных усилий и то, как это реализовано в программе Comsol Multiphysics.

Усилия, создаваемые электрическими полями, можно разделить на усилия, действующие на свободные заряды в объеме или на поверхности, и усилия, действующие на область с диэлектрической средой без свободных зарядов. Рассмотрим сначала формулу, по которой рассчитывают усилия, действующие на свободный заряд Q с плотностью ρ в объеме V, который размещен в электрическом поле $\mathbf{E}$. В таком случае объемная сила $\mathbf{f_e}$ будет

$$\mathbf{f_e} = \rho\mathbf{E}, \tag{7.34}$$

тогда общая сила, действующая на этот объем V, будет

$$\mathbf{F_e} = \int\limits_V \mathbf{f_e} dV = \int\limits_V \boldsymbol{\rho} \mathbf{E} dV.$$

Другой подход основан на принципе минимизации энергии. Если в системе изменяется значение энергии, то это приводит к совершению работы. Из этих соображений запишем уравнение

$$\mathbf{f_e} = -grad w_e,$$

а полное усилие, действующее на тело, будет

$$\mathbf{F_e} = \int\limits_V \mathbf{f_e} dV = -grad W_e,$$

где w_e – плотность электрической энергии; W_e – полная электрическая энергия.

Допустим, стоит задача рассчитать усилие, действующее на диэлектрическое тело от электродов. Чтобы использовать метод минимизации энергии для расчета силы в позиции 1, необходимо рассчитать полную магнитную энергию W_{e1} и W_{e2} для положения 1 и положения 2 (рис. 7.22, *а*). В таком случае можно записать формулу для усилия, действующего вдоль оси y,

$$F_{ey} = \frac{W_{e1} - W_{e2}}{\Delta y}.$$

Общим случаем является подход к расчету усилий, в котором используется тензор Максвелла. Рассмотрим уравнение (7.34) и заменим в нем плотность заряда с помощью уравнения (7.4), получим

$$\mathbf{f_e} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \left(div E \right) \mathbf{E},$$

тогда это выражение можно записать в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left({E_x}^2 - \frac{1}{2}E^2\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(E_x E_y\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(E_x E_z\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(E_y E_x\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left({E_y}^2 - \frac{1}{2}E^2\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(E_y E_z\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(E_z E_x\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(E_z E_y\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left({E_z}^2 - \frac{1}{2}E^2\right) \end{pmatrix} = \mathbf{f_e}$$

относительно модуля вектора электрической напряженности поля E и компонент этого вектора E_x, E_y, E_z. Будем называть S^e тензором Максвелла для электрического поля и определим его как

$$\mathbf{S^e} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \left({E_x}^2 - \frac{1}{2}E^2\right) & (E_xE_y) & (E_xE_z) \\ (E_yE_x) & \left({E_y}^2 - \frac{1}{2}E^2\right) & (E_yE_z) \\ (E_zE_x) & (E_zE_y) & \left({E_z}^2 - \frac{1}{2}E^2\right) \end{pmatrix},$$

тогда можно записать усилие через тензор Максвелла

$$div^2\mathbf{S^e} = \rho\mathbf{E} = \mathbf{f_e}.$$

Результирующее усилие $\mathbf{F_e}$, действующее на заданный объем V, можно вычислить (используя теорему Гаусса для дивергенции) как

$$\mathbf{F_e} = \int\limits_V f_e dV = \int\limits_V \rho\mathbf{E}dV = \int\limits_V div^2\mathbf{S^e}dV = \oiint_S \mathbf{S^e}dS.$$

Здесь интеграл берется по замкнутой граничной поверхности объема, в котором вычисляется усилие. Стоит подчеркнуть, что тензор Максвелла рассчитывается на границах (рис. 7.22, *б*).

Усилия, возникающие из-за действия магнитного поля на движущий заряд, можно рассчитать по формуле

$$\mathbf{F_m} = Q\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right).$$

Объемные усилия можно записать в виде

$$\mathbf{f_m} = \frac{\mathbf{F_m}}{dV} = \rho\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right).$$

Поскольку плотность тока в проводнике $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$, получим

$$\mathbf{f_m} = \mathbf{J} \times \mathbf{B},$$

тогда можно посчитать магнитные усилия в проводящем объеме

$$\mathbf{F_m} = \int\limits_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B})dV.$$

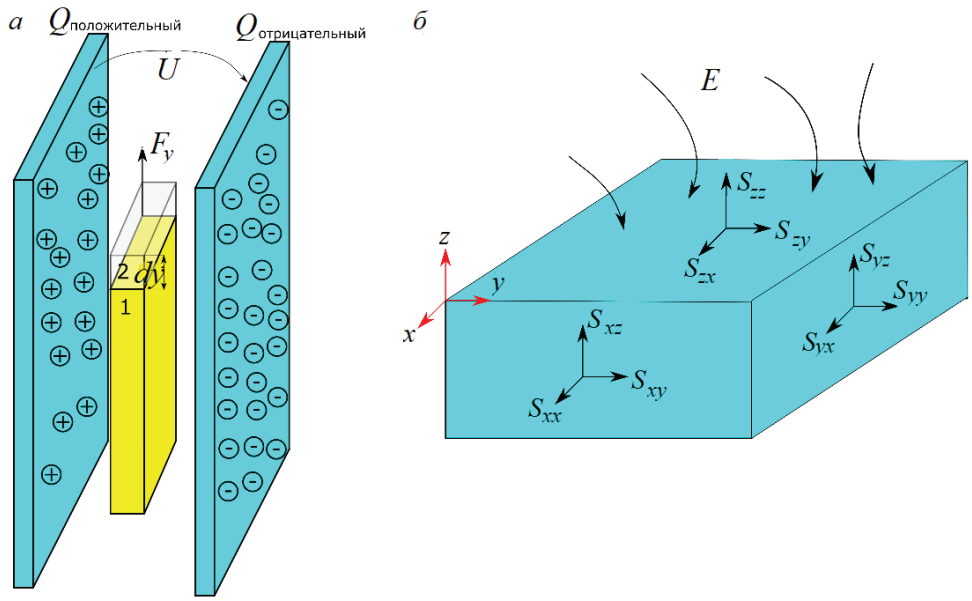


Рис. 7.22. Схематичное представление расчета усилий с помощью минимизации энергии (*а*) и тензора Максвелла (*б*)

Это выражение называют усилиями Лоренца. Данная формула дает довольно точные результаты для проводящей среды с относительной магнитной проницаемостью равной единице.

По аналогии с расчетом электростатических усилий, по принципу минимизации энергии можно записать выражение для магнитных усилий

$$\mathbf{f_m} = -gradw_m = -\frac{1}{2}grad\left(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right).$$

Также магнитные усилия можно рассчитать на основе тензора Максвелла. Тензор Максвелла для магнитного поля запишем подобно электрическому тензору

$$S^m = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}B & B_xB_y & B_xB_z \\ B_xB_y & B_y^2 - \frac{1}{2}B & B_yB_z \\ B_xB_z & B_yB_z & B_z^2 - \frac{1}{2}B \end{pmatrix}$$

относительно модуля вектора магнитной индукции B и его компонент B_x, B_y, B_z. В таком случае удельные магнитные усилия будут

$$\mathbf{f_m} = div^2\mathbf{S^m}.$$

Усилия, рассчитанные на основе минимизации энергии с помощью тензора Максвелла, учитывают как составляющую усилий, которая возникает от взаимодействия магнитного поля с током (усилия Лоренца), так и усилия, возникающие в ферромагнитных частях, через которые проходят линии магнитного поля.

В Comsol, при расчете магнитных полей, по умолчанию рассчитываются распределения удельных усилий Лоренца в каждой расчетной области. Для определения полного усилия необходимо взять интеграл по всему объему. Для расчета тензора Максвелла, в физических интерфейсах реализован узел ***Force Calculatio***. В поле ***Domain Selection*** нужно определить область, в которой необходимо рассчитать усилия или момент силы. Для определения момента необходимо задать с помощью вектора ось вращения в поле ***Torque axis*** и точку вращения в поле ***Torque rotation point***, для которой вычисляется момент. Расчет с помощью блока ***Force Calculation*** вычисляет полное усилие в этой области на основе тензора Максвелла.

Расчет усилий на основе минимизации энергии в Comsol не встроен, но его можно реализовать, используя в узле ***Study*** исследование ***Sensitivity*** [12]. Также существуют и другие способы расчета усилий, например ***Egg Shell Method*** [28, 29] или аналитический подход [30, 31, 32, 33], которые не встроены в Comsol, но при желании могут быть реализованы пользователем. При выборе метода расчета усилий для конкретной задачи, пользователь должен понимать слабые и сильные стороны каждого метода.

7.13. Теплопередача. Физический модуль *Heat Transfer*

На практике часто встречаются задачи по расчету тепловых процессов в электротехнологических установках как в связке с электромагнитной задачей (например, индукционный нагрев), так и без связи (расчет

тепловых потерь в печах сопротивления). В Comsol Multiphysics реализован модуль ***Heat Transfer*** для анализа температурных полей в различных формулировках. Данный физический интерфейс этого пакета достаточно гибкий и интуитивно понятный, но требует базового понимания процессов теплопередачи, поэтому кратко рассмотрим основные явления, которые необходимо знать при расчете электротехнологических установок [34, 35, 36].

Теплообменом или теплопередачей называется переход тепла из одной части пространства к другой, от одного тела к другому или внутри тела от одной его части к другой. Непременным условием теплообмена является наличие разности температур. Распределение температуры в пространстве и времени называют температурным полем (7.35). Уравнение (7.35) описывает нестационарное температурное поле: температура изменяется в зависимости от времени. Стационарным температурным полем, или установившимся процессом, называют такой процесс, при котором не происходит изменение температуры во времени или этим изменением для конкретной задачи можно пренебречь.

$$f = T(x, y, z, t), \tag{7.35}$$

где T – температура; x, y, z– переменные пространства; t – переменная времени.

Перенос тепловых потоков в пространстве осуществляется тремя способами различной природы: теплопроводностью, конвекцией и излучением. Теплопроводностью называют теплообмен, при котором перенос энергии в форме теплоты в неравномерно нагретой среде имеет атомно-молекулярный характер и не связан с макроскопическим движением среды [34]. В газах перенос энергии осуществляется хаотически движущимися молекулами, в металлах – в основном электронами проводимости, в диэлектриках – за счет связанных колебаний частиц. Процесс теплопроводности можно описать с помощью уравнения Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \, gradT. \tag{7.36}$$

Коэффициент теплопроводности λ [Вт/(м · К)] характеризует связь вектора теплового потока $\mathbf{q}$ [Вт/м^2] с градиентом температурного поля $gradT$ [К/м] (перепадом температур в пространстве). Это величина, численно равная плотности теплового потока $\mathbf{q}$, проходящего через изотермическую поверхность теплообмена при температурном градиенте,

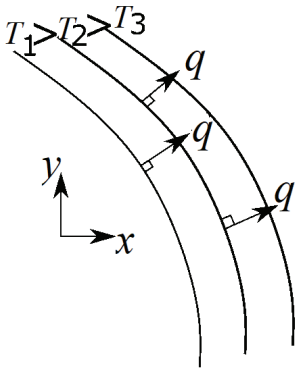


Рис. 7.23. Направление теплового потока в изотермических кривых

равном единице. Из уравнения (7.36) следует, что тепловой поток распространяется по направлению к нормали изотермической поверхности в сторону уменьшения температуры (см. рис. 7.23). Стоит отметить, что коэффициент теплопередачи нельзя рассчитать теоретически (за исключением газов при низких температурах), поэтому имеющиеся сведения о коэффициентах теплопроводности веществ основаны на экспериментальных данных [37]. В металлах имеет место хорошо известная связь между электронной теплопроводностью и электрическим сопротивлением, называемая законом Видемана – Франца – Лоренца [34]:

$$\lambda = Lo \cdot T\,\gamma,$$

где Lo – число Лоренца, равное $2.445 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{K^2 \cdot \text{См}}$; T – температура; γ – электропроводность.

Теплопередача конвекцией происходит в виде перемещения макроскопических частей среды, приводящего к теплообмену и массообмену в неравномерно нагретой жидкой или газообразной среде. Конвекцию, в зависимости от природы происхождения, разделяют на естественную и вынужденную. Естественная конвекция характеризуется переносом тепла в связи с движением среды, обусловленным только действием силы тяжести (плавучести) из-за неравномерности нагрева и, как следствие, изменением плотности вещества в пространстве. Вынужденная конвекция характеризуется наличием внешних сил (например, действием вентилятора или электромагнитных сил в жидких металлах), действующих на среду. Моделирование конвекции осуществляется как за счет связан-

ных задач температурного и скорости полей, так и с помощью граничного условия третьего рода [34]

$$\mathbf{q} = \alpha\left(T_{\text{с}} - T_{\text{ж}}\right),$$

где $\mathbf{q}$ – тепловой поток через поверхность; α – коэффициент теплоотдачи, рассчитывается аналитически в большинстве случаев и зависит от геометрии стенки, скорости, свойств внешней среды и ряда других параметров; $T_{\text{с}}$ – температура омывающей жидкости; $T_{\text{ж}}$ – температура стенки на границе с омывающей средой.

Другой способ теплопередачи – излучение. Данный тип теплообмена представляет собой распространение энергии в виде электромагнитных волн. Этот вид энергии может происходить в вакууме, в отличие от других двух видов теплопередачи. При описании данного явления используют модель абсолютно черного тела. Абсолютно черным телом называют идеальное тело, которое пропускает внутрь себя все падающее излучение, не отражая энергии. Важным законом, описывающим явление излучения энергии абсолютно черным телом, является закон Стефана – Больцмана (7.37). Этот закон описывает интенсивность испускаемой энергии в зависимости от значения температуры абсолютно черного тела. Переход от абсолютно черного тела к реальным телам (серым) осуществляется с помощью закона Кирхгофа (7.38) в результате введения степени черноты излучения (коэффициент излучения), который составляет от 0 до 1. Также обмен энергии нескольких тел характеризуется геометрическими параметрами, в том числе телесным углом [37].

$$E_s = 5.67\left(\frac{T}{100}\right)^4; \tag{7.37}$$

$$E_s = 5.67\varepsilon\left(\frac{T}{100}\right)^4. \tag{7.38}$$

Стоит также описать ряд важных показателей теплового поля. Теплоемкость характеризует способность тела накапливать тепловую энергию или, другими словами, является величиной, равной отношению количества теплоты δQ, сообщаемого телу (системе) при бесконечно малом изменении его состояния в каком-либо процессе, к соответствующему изменению температуры T этого тела $C = \delta Q/dT$. Отноше-

ние теплоемкости к массе тела m называется удельной теплоемкостью $c = C/m$. В таком случае в общем виде можно записать дифференциальное уравнение теплопроводности [38]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = div\,(\lambda\, gradT) + q_V, \tag{7.39}$$

где ρ – плотность нагреваемого вещества; q_V – удельная мощность тепловыделения. Уравнение (7.39) можно переписать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot div\,(\lambda\, gradT) + \frac{q_V}{\rho c},$$

где a называют коэффициентом температуропроводности, характеризующим скорость выравнивания температуры, $a = \dfrac{\lambda}{\rho}$.

Вышеперечисленные тепловые явления можно оценить с помощью физического интерфейса ***Heat Transfer***. Данный модуль имеет очень широкий спектр математических моделей: от простой теплопередачи теплопроводностью до тепловых явлений в биологических тканях. Невозможно подробно описать весь набор математических моделей в одной работе. Кроме того, большинство из этих интерфейсов является узконаправленными, и их сложно применить для задач электротехнологии. Но для общей справки стоит кратко упомянуть назначение каждого модуля.

Физические интерфейсы ***Heat Transfer in Solid*** и ***Heat Transfer in Liquid*** реализуют расчет температурных полей в твердых и жидких телах. Данные два модуля являются взаимозаменяемыми, т. е. все функции, доступные в ***Heat Transfer in Solid***, доступны и в ***Heat Transfer in Liquid***. Их отличие заключается в том, что для ***Heat Transfer in Liquid*** по умолчанию программа определяет всю расчетную область как жидкость, а для ***Heat Transfer in Solid*** – как твердое тело. В этой работе будем рассматривать именно эти физические интерфейсы, а ввиду их взаимозаменимости, для сокращения излагаемого материала, описание функционала будет производиться для ***Heat Transfer in Solid***.

Существует и ряд других физических интерфейсов, реализованных в Comsol Multiphysics для расчета тепловых явлений, о которых стоит коротко упомянуть. Интерфейс ***Heat Transfer in Pipes*** позволяет описывать кондиционно-конвективный теплообмен в трубах с помощью критерия подобия и числа подобия для труб. Такой подход позволя-

ет опускать расчет уравнений Навье – Стокса. ***Local Thermal Non-Equilibrium*** предназначен для моделирования теплопередачи в пористых средах в неравновесном состоянии. Он предоставляет возможность определять объемную долю твердого тела и коэффициента внутренней конвективной теплопередачи. При выборе этого интерфейса, в дерево модели добавляются физические интерфейсы ***Heat Transfer in Solid*** и ***Heat Transfer in Liquid*** в связке. Интерфейс ***Heat Transfer in Porous*** реализует все три вида теплопередачи в пористых средах. Теплопередачу в биологических тканях удобно моделировать с помощью интерфейса ***Bioheat Transfer***. Многие задачи имеют слишком узкие регионы расчетной области, например: пленки, тонкостенные слои, трещины. Для таких задач удобно использовать ветку ***Thin Structure*** физического интерфейса ***Heat Transfer***. Часто встречаются задачи, в которых преобладает лучистая теплопередача, а другими видами теплопередачи можно пренебречь. Расчет таких задач в Comsol Multiphysics удобно реализовывать с помощью ветки ***Radiation*** (рис. 7.24).

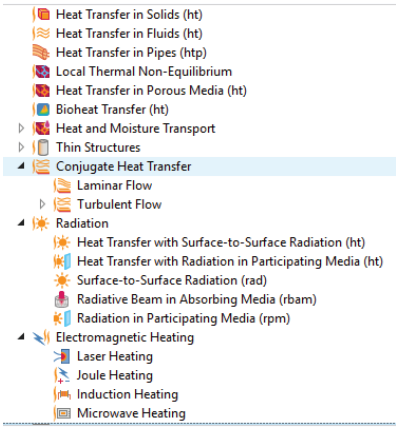


Рис. 7.24. Математические модели модуля ***Heat Transfer***

Интерфейсы ***Conjugate Heat Transfer***, ***Electromagnetic Heating*** представляют собой связку температурного поля с полем скоростей и электромагнитным соответственно. Интерфейс ***Conjugate Heat Transfer*** удобно использовать, когда необходимо рассчитать естественную или вынужденную конвекцию в явном виде. Стоит отметить, что такая математическая модель содержит связанную задачу теплопередачи

и поля скоростей на основе уравнения Навье – Стокса для турбулентных или ламинарных режимов. Интерфейс ***Electromagnetic Heating*** также является совокупностью модуля ***Heat Transfer*** и одного из модулей ***AC/DC***. Такой подход моделирования удобен для задач индукционного, прямого, диэлектрического, лазерного нагревов.

Перейдем к описанию функционала физического интерфейса ***Heat Transfer in Solid***. Данный интерфейс поддерживает задачи любой размерности пространства для стационарных, нестационарных и квазистационарных полей температур. Основным уравнением, описывающим тепловые процессы в данном интерфейсе, является дифференциальное уравнение Фурье, которое решается относительно температуры. Это уравнение запишется как уравнение (7.39), только с добавлением члена теплопереноса за счет движения среды (если скорость не равна нулю) для динамической системы:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\ gradT \right) = div(\lambda gradT) + Q + Q_{ted}, \qquad (7.40)$$

где C_p – теплоемкость среды при постоянном давлении; $\mathbf{u}$ – вектор движения среды; Q – плотность тепловой мощности; Q_{ted} – выделение тепла за счет деформации пространства. Для стационарных температурных полей производная температуры по времени будет равна нулю.

Окно настроек ***Heat Transfer in Solid***, как практически все узлы Comsol Multiphysics, содержит название данного узла (*Label*), префиксное имя переменных для этого интерфейса (*Name*), с помощью которого можно производить ссылки (интерфейс ***Domain Selection Equation***) (рис. 7.25, *а*).

Следующим полем настроек узла ***Heat Transfer in Solid*** является определение физической модели (*Physical Model*). На данном этапе развития программы разработчики предлагают следущие модели: лучистого теплообмена между поверхностями ***Surface-to-surface radiation***, излучения в окружающую среду ***Radiation in participating media***, теплопередачи в биологических тканях (***Heat transfer in biological tissue***), изотермической области (***Isothermal domain***), теплопередачи в сплавах (***Heat transfer in alloys***) и теплопередачи в пористой среде (***Heat transfer in porous media***) (рис. 7.25, *б*). Активация данных физических моделей расширяет функционал интерфейса ***Heat Transfer in Solid*** за счет появления возможностей добавления ряда узлов, ко-

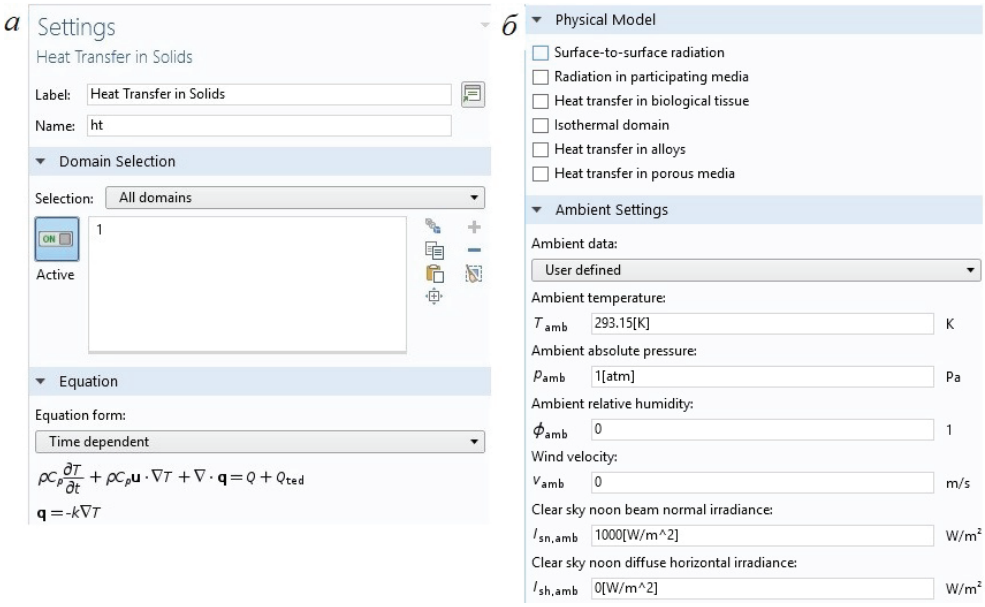


Рис. 7.25. Окно настроек физического интерфейса ***Heat Transfer in Solids***

торые не доступны без ее активации. Это позволяет достаточно просто создавать сложные математические модели. Как ниже будет показано, некоторые физические узлы требуют, например, определения температуры окружающей среды, которую возможно определить вручную в самом узле или сослаться на базовые настройки поля (*Ambient temperature*). В этом поле определяются значения основных параметров окружающей среды.

Последними важными настройками узла ***Heat Transfer in Solid*** являются вкладки ***Discretization*** и ***Dependent Variables***. Как и для всех физических интерфейсов ***AC/DC***, эти настройки служат для выбора типа аппроксимации конечных элементов и присвоения имени переменной, относительно которой решается основная система уравнений.

При добавлении физического интерфейса ***Heat Transfer in Solid***, программа автоматически создает в модели три узла: ***Solid***, ***Initial Values*** и ***Thermal Insulation***. При активации физического интерфейса ***Isothermal domain***, в модели по умолчанию появляется еще один узел

Isothermal Domain Interface и добавляется ряд граничных условий при активации физической модели ***Radiation in participating media***.

Узел ***Solid*** предназначен для описания уравнения (7.40) в выбранной области. В настройках этого узла можно определить, для каких доменов (областей) этот узел определен в окне ***Domain Selection***. Для ряда задач, например когда тепловые физические свойства в пространстве имеют сложную зависимость, можно изменить систему координат. Эта опция осуществляется в окне ***Coordinate System Selection***. Также в настройках можно определить, откуда брать значения физических свойств (теплопроводности, плотности и удельной теплоемкости).

Примечание: изменять или переопределять область определения этого узла можно только для самостоятельно добавленных узлов *Solid*. Область определения узла *Solid*, созданного физическим интерфейсом, автоматически берется из области определения самого физического интерфейса.

При активации физической модели ***Surface-to-surface radiation***, по умолчанию программа создает подузел в узле ***Solid***, который называется ***Opacity*** (затененность). Этот подузел позволяет определить характер области для электромагнитного излучения (прозрачный – *Transparent* или непрозрачный – *opaque*). Также пользователь может самостоятельно создать еще три подузла в узле ***Solid***. Подузел ***Translation motion*** позволяет определить скорость движения среды для уравнения (7.40) по каждой из координат в зависимости от размерности задачи. Для этого необходимо определить область, имеющую движение, и в настройках этого узла, в окне ***Velocity field***, задать значения скорости по каждой из координат (рис. 7.26). Подузел ***Thermoelastic Damping*** описывает значение тепловыделения за счет механической деформации области Q_{ted} в уравнении (7.40). Эти значения можно задать вручную либо сослаться на значения из внешнего физического модуля. В некоторых случаях процесс нагрева сопровождается необратимым поглощением тепла из-за каких-либо химических процессов или механических деформаций. Данный феномен можно учесть в подузле ***Inversible Transformation*** узла ***Solid***. Настройки этого узла требуют более глубокого знания и понимания ряда физических явлений, поэтому, если пользователь понимает эти физические явления, он сможет настроить этот подузел самостоятельно или воспользоваться описанием [20].

Следующий физический узел, который создается по умолчанию при

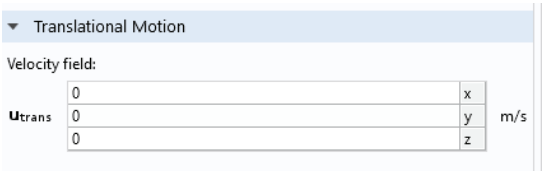


Рис. 7.26. Поле определения скорости движения среды для каждой координаты

выборе интерфейса ***Heat Transfer in Solid***, – ***Initial Values***. Этот узел определяет начальную температуру области. Для нестационарных задач начальная температура будет характеризовать температуру в момент времени, равный нулю. Для стационарных расчетов начальная температура является первым приближенным решением: чем лучше начальное значение температуры будет соответствовать температуре установившегося режима, тем быстрее будет решена задача и проще найти ее решение.

Еще одним узлом, по умолчанию определенным программой для модуля теплопередачи, является ***Thermal Insulation***. Этот узел определен на границах расчетной области и характеризует граничное условие второго рода, а именно то, что нормальная составляющая вектора теплового потока равна нулю (7.41). При активации физической модели ***Isothermal Domain*** в настройках ***Heat Transfer in Solid***, в дереве модели, программа по умолчанию определит *Isothermal Domain Interface*. Этот узел является граничным условием для областей с описанием физических явлений при помощи *Isothermal Domain*. *Isothermal Domain Interface* предписывает на границах условие (7.41), как для узла *Thermal Insulation*.

$$-\mathbf{nq} = 0. \tag{7.41}$$

где n – нормальный вектор, q – плотность теплового потока.

Тип граничного условия данного узла можно изменить в настройках узла на вкладке ***Interface type***. Программа предоставляет возможность выбора пяти разных типов граничного условия: *Thermal Insulation* (тепловой поток на границе равен нулю), *Continuity* (тепловой поток на внешней границе равен потоку на внутренней), *Ventilation* (описывает процесс охлаждения потоком с известным расходом), *Convective heat flux*

(описывает процесс теплоотдачи с поверхности при известном коэффициенте теплоотдачи) и *Thermal contact* (изменение теплового потока на выбранной границе пропорционально заданному тепловому сопротивлению).

Граничное условие непрерывности (***Continuity***) описывается с помощью уравнения (7.42). Нормальная составляющая плотности входного потока, например $\mathbf{q_d}$, равна нормальному вектору плотности потока, входящего в границу $\mathbf{q_u}$. Узел вентиляция (***Ventilation***) позволяет задавать направление потока на границе как входящего в область (***positive***), выходящего (***negative***) или проходящего в обе стороны (***both sides***). Также этот узел позволяет задавать расход охлаждающего газа на поверхности в единицу времени (φ) или массу расхода в единицу времени (Φ). На основе этих параметров вычисляется нормальная составляющая плотности потока на границе (7.43). Плотность теплового потока рассчитывается через энтальпию, или теплосодержание ($H = C_pT$), и расход (φ) по формуле (7.43). В графическом окне будет показано выбранное направление потока охлаждения. Условие конвективного теплового потока на границе изотермической поверхности описывается с помощью уравнения (7.44). Для разрешения данного условия, в настройках этого узла необходимо определить коэффициент теплоотдачи с поверхности h или теплопроводность на границе $h_{th} = hA$ и температуру окружающей среды T_{ext}. Пользователь может определить температуру окружающей среды в настройках этого узла (***User defined***) или взять это значение из ранее определенного в настройках физического интерфейса ***Heat Transfer in Solid***, выбрав в настройках узла, во вкладке ***External Temperature***, условие ***Ambient Temperature***. Последним типом граничного условия узла ***Isothermal Domain Interface*** является ***Thermal Contact***. Данное условие описывается с помощью выражения (7.45), где R_t определяет термическое сопротивление на границе выбранной области.

$$-\mathbf{n_d} \cdot \mathbf{q_d} = \mathbf{n_u} \cdot \mathbf{q_u}, \tag{7.42}$$

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \varphi \cdot H, \tag{7.43}$$

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = h\left(T_{ext} - T\right), \tag{7.44}$$

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \frac{(T_{ext} - T)}{R_t}, \tag{7.45}$$

где n_d и n_u – нормальный вектор к нижнему слою и верхнему соответственно; T – рассчитываемая температура.

При активации в настройках ***Heat Transfer in Solid*** физических моделей *Surface-to-surface radiation* и *Isothermal domain* доступны следующие узлы (рис. 7.27) для описания математической модели в программе Comsol. Узел *Solid* был подробно описан выше в этой части работы.

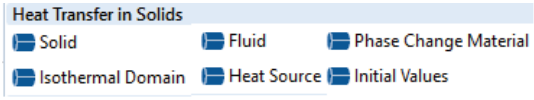


Рис. 7.27. Поле определения скорости движения среды для каждой координаты

Узел *Fluid* является настройкой, подобной узлу *Solid*. *Fluid* предназначен для описания теплопередачи в жидких средах. Математическое уравнение, описывающее физическое явление, описываемое с помощью этого узла, определяется, как в выражении (7.40), только выделение энергии при деформации Q_{ted} заменяется на тепловую энергию за счет работы силы давления жидкости Q_p и вязкой диссипации Q_{vd}.

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot gradT \right) = div(\lambda gradT) + Q + Q_p + Q_{vd}. \tag{7.46}$$

По умолчанию эти члены в уравнении (7.46) равны нулю, их можно определить с помощью добавления подузлов ***Pressure Work*** и ***Viscous Dissipation*** соответственно. В настройках этого узла значение скорости среды и абсолютное давление можно задать во вкладке ***Model Input*** самостоятельно или связать с другим физическим интерфейсом, выбрав его в выпадающей ленте ***Velocity field*** и ***Absolute pressure***. Свойства среды, требуемые для описания данного узла, идентичны узлу ***Solid***, только требуют определения значения ***Ratio of specific heats*** (отношение относительных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме) $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$. Учет дополнительного конвективного теплового

потока производится с помощью числа Нуссельта путем включения опции ***Equivalent conductivity for convection*** в настройках узла.

Множество электротехнологических задач требует учета фазового перехода первого рода (плавление и затвердевание) [39]. Программа Comsol позволяет осуществлять моделирование такого физического явления с помощью ***Phase Change Material.*** Этот узел описывается с помощью уравнения (7.46) с той лишь разницей, что тепловые свойства среды зависят от фазы среды [39]. Приведем пример: при нагреве металла в печи, металл твердой фазы обладает свойствами, отличными от свойств жидкой фазы этого же металла. Поэтому необходимо, помимо определения наличия жидкой и твердой фазы в пространстве и времени, корректно определить свойства для каждой фазы. Настройка вкладки входных параметров (*Model Input*) – как в узле *Fluid. Phase Change Material* позволяет рассчитывать пять различных фаз одновременно, количество требуемых для учета фаз выбирается во вкладке с настройками узла ***Number of Phase Transitions.*** Следующей вкладкой настроек этого функционала программы является описание условий перехода фаз. Допустим, что твердая фаза обозначается i, а жидкая – j, причем i, j находятся в пределе от 1 до 5 и $j = i + 1$, т. к. максимальное количество фаз, реализуемых одновременно, лежит в пределе от 1 до 5, а жидкая фаза следует за твердой. В таком случае, определив точку температуры плавления (кристаллизации) $T_{pc,i\to j}$ и скрытую теплоту плавления $L_{i\to j}$ (***Latent heat***), в теории можно было бы посчитать фазовый переход. Однако стоит вспомнить, что численные методы плохо работают с функциями, которые изменяются скачком или имеют разрыв, поэтому вводят переходный температурный промежуток $\Delta T_{i\to j}$ (***Transition interval***), в котором предполагается неопределенной жидкая или твердая фаза. Будем говорить, что если фазовая функция i фазы $\theta_i = 1$, то в данной области твердая фаза, а если фазовая функция j фазы $\theta_j = 1$, в этой области предполагается жидкая фаза. На рис. 7.28 показана θ_j в зависимости от температуры.

За промежуток температур $\Delta T_{i\to j}$ поглотится количество энергии, равное заданной скрытой теплоте плавления $L_{i\to j}$. Чем меньше $\Delta T_{i\to j}$, тем точнее определяется фазовый переход, но стоит отметить, что снижение $\Delta T_{i\to j}$ приводит к ухудшению сходимости задачи, поэтому часто используют постепенное снижение переходного температурного диапазона, принимая в качестве начальных условий предыдущее решение

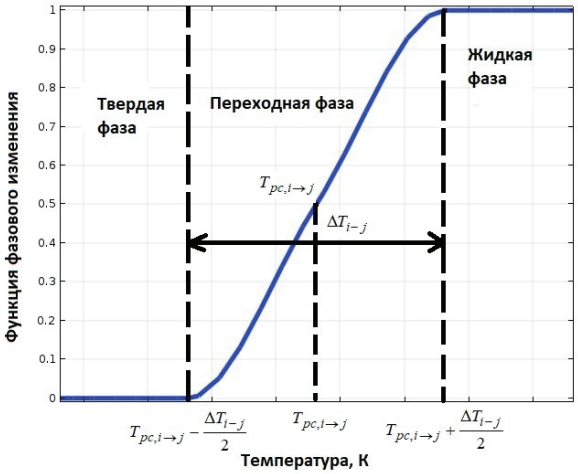


Рис. 7.28. Зависимость функции фазового перехода от температуры

с большим $\Delta T_{i\to j}$. Свойства среды определяются для каждой фазы пользователем или берутся из узла материалов, а формулы (7.47)–(7.50) записываются относительно значения функции фазового изменения θ_k

$$\rho = \sum_{k}^{N=1...5} \theta_k \rho_k; \tag{7.47}$$

$$C_p = \frac{1}{\rho}\left(\sum_{k=1}^{N=1...5} \theta_k \rho_k C_{p,k}\right) + \sum_{m=1}^{N-1} L_{m\to m+1}\frac{d\alpha_{m\to m+1}}{dT}; \tag{7.48}$$

$$\lambda = \sum_{k=1}^{1...5} \theta_k \lambda_k; \tag{7.49}$$

$$\alpha_{m\to m+1} = \frac{1}{2}\frac{\theta_{k+1}\rho_{k+1} - \theta_k\rho_k}{\theta_k\rho_k + \theta_k\rho_k}, \tag{7.50}$$

где ρ – плотность; ρ_k – плотность для k-го фазового состояния; C_p – теплоемкость; $C_{p,k}$ – теплоемкость для k-го фазового состояния; λ – теплопроводность; λ_k – теплопроводность для k-го фазового состояния; α_m – фазовая фракция; k – номер фазы среды.

Член скрытой теплоты плавления входит в выражение (7.48), внося вклад в теплоемкость, что позволяет косвенно учитывать поглощение тепла на переходном интервале за счет завышения теплоемкости в этом диапазоне температур. Индекс m у скрытой теплоты плавления $L_{m\to m+1}$ показывает номер переходного участка или номер интервала $\Delta T_{k\to k+1}$. Всегда должно выполняться условие $T_{pc,k\to k+1} > T_{pc,k+1\to k+2} > > ...T_{pc,N-1\to N}$, а значение $\Delta T_{k\to k+1} > 0$.

Источник тепла Q в уравнениях (7.40) и (7.46) можно задать с помощью узла ***Heat Source*** в заданной области. В настройках этого узла необходимо определить расчетную область, в которой предполагается наличие внешнего источника тепла. Тепловыделение в данной области можно описать с помощью трех способов (рис. 7.29): удельной мощности (*general source*), определив вручную или сославшись на результаты из другого физического интерфейса; коэффициента абсорбции (*Linear source*), тогда мощность в области будет линейно зависеть от температуры пропорционально этому коэффициенту; полной мощности в объеме (*Heat rate*).

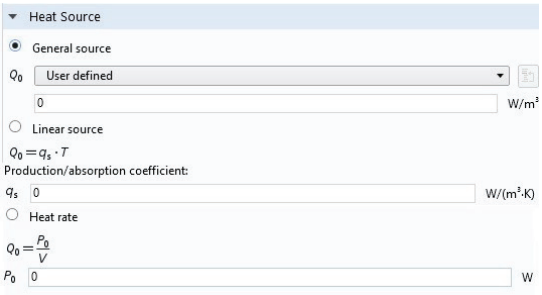


Рис. 7.29. Способы описания выделения тепловой энергии в области

Задача 11. Водяное охлаждение

Дан полый медный виток индуктора, внешний радиус которого равен 5 мм, а внутренний – 3 мм. Расстояние от оси симметрии витка до центра витка – 25 мм. Задана удельная мощность $2 \cdot 10^7$ Вт/м^3 в нагре-

вателе. Температура подводимой воды равна температуре окружающей среды и составляет 20 °C. Скорость подвода воды – 1 кг/мин.

Показать распределение температуры в витке и охлаждающей воде в установившемся режиме.

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D Axisymmetric*** ⇒ ***Heat Transfer in Solids*** ⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже, а также рассчитываем объем воды в полости витка.

Name	Expression	Value	Description
a	75[mm]	0.075 m	
b	100[mm]	0.1 m	
R1	5[mm]	0.005 m	
R2	3[mm]	0.003 m	
R3	25[mm]	0.025 m	
HeatSource	2E7[W/m^3]	2E7 W/m³	
Mt	1[kg/min]	0.016667 kg/s	
Tin	20[degC]	293.15 K	
Vw	2*pi*R3*pi*R2^2	4.4413E-6 m³	

3. В узле ***Geometry*** создаем круги ***Circle*** для задания областей витка и воды и прямоугольник ***Rectangle***, соответствующий расчетной области. Параметры элементов берем из ***Parameters***.

4. Добавим в узле ***Materials*** материалы ***Air*** и ***Copper*** и ***Water*** из библиотеки материалов. ***Copper*** расположен в библиотеке ***AC/DC***, а ***Air*** – в ***Liquids and Gases/Gases***, ***Water*** — в ***Liquids and Gases/ Liquids***.

5. В настройке физического интерфейса ***Heat Transfer in Solid*** создадим два блока ***Heat Source***. В первом выбираем область меди и задаем величину Q_0 равной **HeatSource**, а во втором выбираем область воды и задаем величину Q_0 как выражение **Mt*ht.Cp*(Tin-T)/Vw**. Далее необходимо создать блок ***Temperature*** для задания температуры внешней части окружающей среды. В настройках задаем параметр T_0 равным **Tin**.

6. Запускаем решение исследования, нажав на кнопку ***Compute***.

7. Показать распределение температуры в заготовке можно с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Line Graph***. В узле ***Data Sets*** необходимо создать кривую ***Cut Line 2D***, вдоль которой планируется строить распределение. В настройках ***Cut Line 2D*** необходимо определить, из какого исследования брать решение. Делается это в настройках данного узла на вкладке ***Data Sets***. Затем в настройках графика ***Line Graph*** необходимо задать ***Cut Line 2D*** как источник данных. В окне ***Expression*** необходимо записать **T**.

Когда необходимо распределение температуры в пространстве для части расчетной области описать постоянным, причем температура в этой области может изменяться во времени, тогда удобно использовать узел *Isothermal Domain*. Этот узел доступен в модели, если в настройках физической модели ***Heat Transfer in Solid*** поставить галочку в *Isothermal domain*. Удобно использовать такой интерфейс, например, при расчете устройств нагрева с помощью тепловых электрических нагревателей (ТЭНов), для которых принято, что температура в объеме постоянная. Следует отметить, что для данной области определяются свои граничные условия в узле *Isothermal Domain Interface*, которые следует выбирать исходя из условий задачи. Описание этих граничных условий было приведено выше. Данный узел описывает поле температур в этой области с помощью интегральных величин

$$mC_p\frac{dT}{dt} + \oiint\limits_S (\mathbf{n}\cdot\mathbf{q})\,dS = \int\limits_V Q dV,$$

где m — масса заданной области. Температуру в области можно задать во вкладке ***Isothermal domain***, выбрав ***From prescribed temperature***. Другой способ ***From heat balance*** предполагает вычисление программой температуры из баланса энергии всей системы.

Перейдем к описанию граничных условий, реализованных в модуле ***Heat Transfer in Solid***. Все доступные граничные условия при активации физических моделей Surface-to-surface radiation и ***Isothermal domain*** в настройках ***Heat Transfer in Solid*** показаны на рис. 7.30.

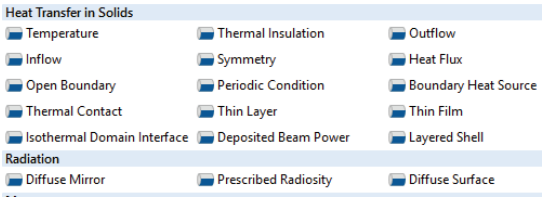


Рис. 7.30. Доступные узлы для описания физических процессов на границах областей в модуле теплопередача

Граничное условие первого рода (7.51) можно описать с помощью узла ***Temperature***

$$T\left(x, y, z, t\right) = f(t). \tag{7.51}$$

Это условие описывает заданное значение температуры как функцию от времени, причем эта функция может быть постоянной во времени при условии, что температура на границе не меняется со временем. В настройках данного узла, в поле ***Temperature***, необходимо рассчитать температуру на выбранной границе.

Задача 12. Распределение температуры в плоской стенке

Плоская стенка высокотемпературной электропечи выполнена из шамотных изделий (кирпича) толщиной $\delta = 250$ мм. Температура на ее поверхностях $T_1 = 1350$ °C и $T_2 = 50$ °C [38]. Теплопроводность шамотного кирпича является функцией от температуры $\lambda(T) = 0.89 + 438 \times \times 10^{-6} T$. Вычислить и изобразить графические распределение температуры в стенке. Сравнить полученные результаты со случаем, когда стенка выполнена из легковесного корунда $\lambda(T) = 0.835 + 100 \cdot 10^{-6}\, T$, а также если бы теплопроводность не зависела от температуры и была равна, например, $\lambda = 0.835$. Будет ли влиять удельная теплоемкость футеровки на распределение температур в установившемся режиме? Будет ли она влиять на скорость достижения установившегося режима?

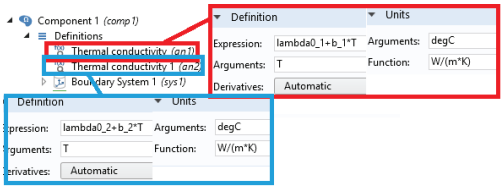
Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Heat Transfer in Solids*** ⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже.

Name	Expression	Value	Description
delta	0.25[m]	0.25 m	Толщина стенки
T1	1350[degC]	1623.2 K	Температура правой ст...
T2	50[degC]	323.15 K	Температура левой сто...
rho	400[kg/m^3]	400 kg/m³	Плотность
Cp	1.2[J/kg/m]	1.2 m/s²	Теплоемкость
lambda0_1	0.89	0.89	теплоемкость при 0 гра...
b_1	438e-6	4.38E-4	дополнительный коэф...
lambda0_2	0.835	0.835	теплоемкость при 0 гра...
b_2	100e-6	1E-4	дополнительный коэф...
h1	20[mm]	0.02 m	высота стенки

3. С помощью аналитической функции (***Analytic***) запишем выражения теплопроводности. Для этого необходимо настроить аналитические функции в узле ***Definitions***, как показано ниже.



4. В узле ***Geometry*** создаем прямоугольник ***Rectangle*** шириной **delta** и высотой **h1**, причем высоту можно взять произвольно.

5. Добавим в узле ***Materials*** подузел ***Blank Material***. Зададим свойства теплопроводности (***Thermal conductivity***) как функцию **an1**, для этого в поле, определяющем значения теплопроводности, запишем **an1(T)**. Это значит, что теплопроводность будет определяться по зависимости, указанной в аналитической функции **an1**.

6. В настройке физического интерфейса ***Heat Transfer in Solid*** необходимо добавить граничное условие ***Temperature*** на каждую

сторону стенки. В настройках этих граничных условий прописываем в поле ***Temperature*** параметры **T1** для внутренней стенки, а **T2** для внешней.

7. По умолчанию в настройках интерфейса ***Heat Transfer in Solid*** физические свойства берутся из узла ***Materials***. Эта настройка определена в узле ***Solid***, в поле ***Thermal Conductivity***. Для того чтобы сравнить несколько различных материалов, добавим еще два узла ***Solid***. И в обоих выберем в поле ***Thermal conductivity*** «Определить эти значения пользователем» (*User defined*). В одном узле зададим теплопроводность **an2(T)** как функцию температуры, а в другом – как параметр **lambda01**.

8. Добавим еще два исследования ***Study*** со стационарными шагами ***Stationary***. Первое исследование *Study 1* будет решать задачу с футеровкой из шамотного кирпича, у которой теплопроводность описывается функцией **an1**. В настройках этого шага поставим галочку *Modify model configuration for study step*. Затем в настройках появится дерево модели, в котором необходимо отключить все узлы ***Solid*** с помощью нажатия правой кнопки мыши на них и выбрать ***Disable***. Для второго исследования *Study 2* сделаем то же самое, только оставим включенным ***Solid***, для которого определена функция **an2**, описывающая теплопроводность легковесного корунда. Это исследование будет решать модель стенки, сделанной из легковесного корунда, причем первый узел *Solid* (созданный по умолчанию программой) отключать не нужно (невозможно). Он переопределяется узлом *Solid*, расположенным ниже, в дереве модели. Третье исследование *Study 3* будет решать задачу для постоянного значения теплопроводности. Поскольку узел, описывающий постоянную теплопроводность, стоит последним в дереве модели, следовательно, он и будет определяться в этой модели.

9. Запускаем все три решения исследования, используя кнопку ***Compute***.

10. Построить распределение температур по толщине стенки. Это можно сделать с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Line Graph***. Для каждой кривой в узле ***Data Sets*** необходимо создать кривую

Cut Line 2D, вдоль которой планируется строить распределение. И в настройках ***Cut Line 2D*** необходимо определить, из какого исследования брать решение. Делается это в настройках данного узла на вкладке ***Data Sets***, затем в настройках графика ***Line Graph*** необходимо определить, что данные брать нужно из ***Cut Line 2D***.

Задача 13. Расчет футеровки ЭПС

Камерная электропечь сопротивления (ЭПС) имеет футеровку, состоящую из трех слоев: первый внутренний слой – шамот-легковес ($\rho_1 = 1000$ кг/м^3), второй слой – шамот-ультралегковес ($\rho_2 = 400$ кг/м^3), третий слой – пенодиатомит ($\rho_1 = 350$ кг/м^3). Температуры на внутренней поверхности футеровки $t_{c1} = 1000$ °C, на наружной поверхности – $t_{c2} = 50$ °C. Вычислить тепловые потери через одну из стен футеровки ЭПС, имеющей геометрические размеры: толщина слоев $\delta_1 = 0.115$ м, $\delta_2 = 0.115$ м, $\delta_3 = 0.230$ м; площадь внутренней поверхности стен $F_1 = 5$ м^2, $F2 = 6$ м^2, $F3 = 7$ м^2, $F4 = 8.5$ м^2 (F_1 – внутренняя поверхность первого слоя; F_2 – внутренняя поверхность второго слоя; F_3 – внутренняя поверхность третьего слоя; F_4 – внешняя поверхность третьего слоя). Теплопроводность материалов футеровки линейно зависит от температуры: $\lambda_1 = 0.404 + 0.349 \cdot 10^{-3} t \ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$; $\lambda_2 = 0,110 + 0,282 \cdot 10^{-3} t \ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$; $\lambda_3 = 0.089 + 0.196 \cdot 10^{-3} t \ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$.

Создание модели:

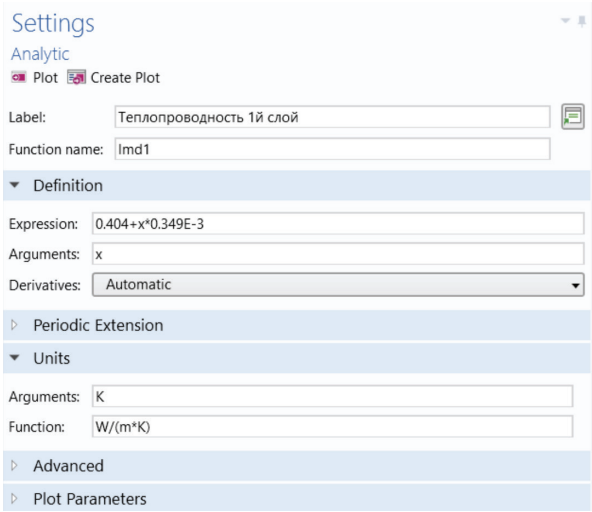
1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Heat Transfer in Solids*** ⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже.

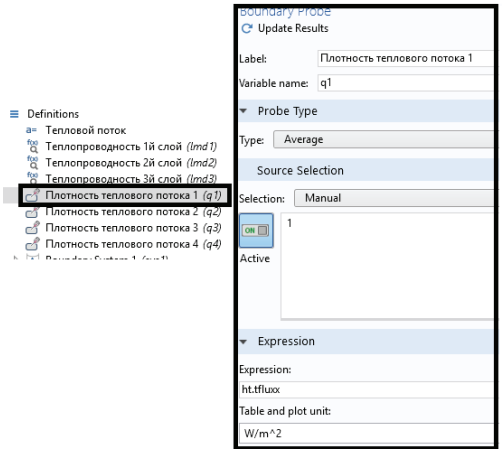
Parameters

Name	Expression	Value	Description
d1	0.115[m]	0.115 m	толщина первого слоя
d2	0.115[m]	0.115 m	толщина ворого слоя
d3	0.23[m]	0.23 m	толщина третьего слоя
f1	5 [m^2]	5 m^2	площадь внутренней поверхности первого слоя
f2	6 [m^2]	6 m^2	площадь внутренней поверхности второго слоя
f3	7[m^2]	7 m^2	площадь внутренней поверхности третьего слоя
f4	8.5[m^2]	8.5 m^2	площадь внешней поверхности третьего слоя
F1	(f1+f2)/2	5.5 m^2	средняя площадь первого слоя
F2	(f2+f3)/2	6.5 m^2	средняя площадь второго слоя
F3	(f3+f4)/2	7.75 m^2	средняя площадь третьего слоя
ro1	1000[kg/m^3]	1000 kg/m^3	плотность первого слоя
ro2	400[kg/m^3]	400 kg/m^3	плотность второго слоя
ro3	350[kg/m^3]	350 kg/m^3	плотность третьего слоя
t1	1000	1000	температура внутреней поверхности первого слоя
t4	50	50	температура внешней поверхности третьего слоя
Cp	1.2[J/(kg*K)]	1.2 J/(kg·K)	теплоемкость

3. В узле ***Component 1*** $\Rightarrow$ ***Definitions*** добавим аналитическую функцию, нажав правой кнопкой мыши на ***Definitions*** $\Rightarrow$ ***Functions*** $\Rightarrow$ ***Analytic***, и зададим теплопроводность каждой стенки (рисунок ниже).

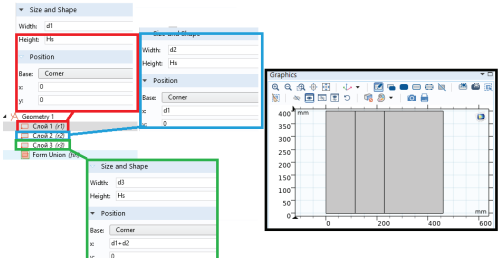


4. В узле ***Component 1*** $\Rightarrow$ ***Definitions*** необходимо щелчком правой кнопки мыши добавить датчики плотности теплового потока на каждой границе стенок (***Probes*** $\Rightarrow$ ***Boundary probe***), для этого необходимо выбрать выражение ***Total heat flux x component*** в настройках узла ***Boundary probe***, на вкладке ***Expression***.

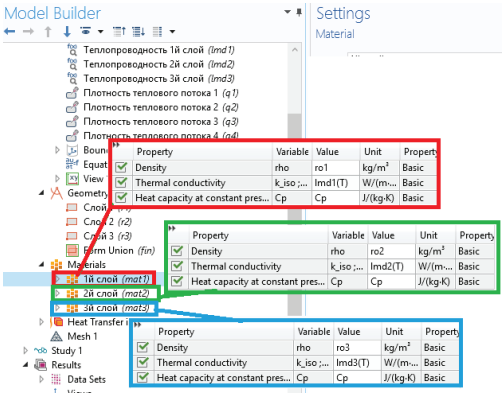


Необходимо помнить, что обращение к значению данного датчика происходит по имени переменной, которое задается в настройках датчика (***Variable name***).

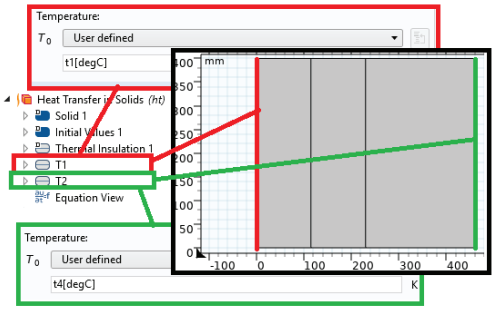
5. Построим геометрию по заданным параметрам, как показано на рисунке ниже.



6. Определим физические свойства каждой стенки, как показано на рисунке ниже. Для этого нужно нажать правой кнопкой мыши на узел в дереве модели ***Materials*** и выбрать ***Blank Material***.



7. Зададим граничные условия в физике ***Heat Transfer in Solid*** $\Rightarrow$ ***Temperature***, в которой необходимо задать граничные температуры, пример для внутренней поверхности показан на рисунке ниже.



8. Построим сетку ***Mesh*** $\Rightarrow$ ***Build mesh***.

9. Рассчитаем модели ***Study*** $\Rightarrow$ ***Compute***.

10. Построим распределение температур по слоям. Это можно сделать с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Line Graph***. Также необходимо добавить в узле ***Data Sets*** линию, по которой будет строиться распределение ***Cut Line 2D***.

11. Рассчитаем средние потери через стенку. Это делается с помощью узла ***Derived Values*** $\Rightarrow$ ***Global Evaluation***. В нем, в поле *Expression*, нужно добавить выражение $(q_1 \cdot F_1 + q_2 \cdot F_2 + q_3 \cdot F_3)/3$, где q_1, q_2, q_3 — значения плотностей теплового потока из датчиков.

Граничное условие второго рода (7.52)

$$q\,(x, y, z, t) = f_1(t), \tag{7.52}$$

предписывающее задание плотности теплового потока на выбранной границе, можно реализовать несколькими способами, используя узлы: *Thermal Insulation*, *Outflow*, *Boundary Heat source*, *Deposited Beam Power*. Узел ***Thermal Insulation*** определяет нулевое значение нормальной составляющей теплового потока на выбранной границе. Аналогичное условие описывает узел ***Outflow***, за исключением конвективного теплового потока. Конвективный тепловой поток не равен нулю на границе, на которой определен узел *Outflow*, а тепловые потоки излучения и теплопроводности равняются нулю. С помощью условия *Outflow* удобно описывать выходную границу конвективного теплового потока. Узлы ***Boundary Heat Source*** и ***Deposited Beam Power*** можно отчасти отнести к условиям, которые моделируют граничные условия второго рода, потому что правая часть уравнения (7.52) в них описывается численно или в виде сложной функции, как в случае с узлом *Deposited Beam Power*.

Узел ***Deposited Beam Power*** позволяет описать нагрев лучом лазера с помощью модели Гаусса и цилиндрического диска. Узел ***Boundary Heat Source*** позволяет непосредственно задать плотность теплового потока на границе или косвенно – с помощью задания полной передаваемой тепловой мощности.

Задача 14. Охлаждение стенки

Последний слой футеровки камерной электропечи сопротивления (ЭПС) состоит из пенодиатомита (плотность $\rho = 350$ кг/м^3). Найти распределение температуры в данном слое футеровки при толщине слоя $\delta = 0,230$ м, если известно, что плотность теплового потока, проходящего через данный слой, $q = 650$ Вт/м^2, а внешняя поверхность стенки охлаждается естественным потоком воздуха. Теплопроводность слоя принять $\lambda = 0,158\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$. Расчет произвести различными способами:

1) с заданным коэффициентом теплоотдачи $h = 10$ Вт/м^2 ;

2) с использованием коэффициента теплоотдачи для естественной конвекции воздуха;

3) с использованием коэффициента теплоотдачи для вынужденной конвекции воздуха со скоростью потока 2 м/с.

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Heat Transfer in Solids*** ⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже.

Parameters

Name	Expression	Value	Description
d	230[mm]	0.23 m	толщина слоя
H	400[mm]	0.4 m	высота слоя
q	650[W/m^2]	650 W/m²	плотность теплового потока из печи
lmd	0.158[W/(m*K)]	0.158 W/(m·K)	коэффициент теплопроводности
h1	10[W/(m^2*K)]	10 W/(m²·K)	коэффициент теплоотдачи
ro	350[kg/m^3]	350 kg/m³	плотность слоя
C	1.2[J/(kg*K)]	1.2 J/(kg·K)	теплоемкость
v	2[m/s]	2 m/s	скорость потока воздуха

3. Построим геометрию ***Geometry*** ⇒ ***Rectangle*** по введенным параметрам. Для этого в настройках поля *Width* следует ввести толщину слоя **d**, в *Height* надо ввести высоту слоя **H**.

4. Зададим свойства материалов ***Materials*** ⇒ ***Blank Material***, выберем область слоя, затем в поле *Thermal conductivity* введем значение коэффициента теплопроводности **lmd**, в поле *Density* введем значение плотности слоя **ro**, а в поле *Heat capacity* введем значение теплоемкости **C**.

5. Зададим граничное условие для физического интерфейса ***Heat Transfer in Solid*** ⇒ ***Heat Flux***. Данный узел необходимо добавить дважды, в первом случае выбрать внутреннюю поверхность слоя с настройками ***Heat Flux*** типа ***General inward heat flux*** (моделирование плотности теплового потока из печи), где в поле ввести значение плотности теплового потока из печи. Для второго узла ***Heat flux*** выбрать внешнюю поверхность слоя с настройками ***Heat Flux*** типа ***Convective heat flux***. При моделировании

теплоотдачи с поверхности, с помощью коэффициента теплоотдачи **h1** в настройках граничного условия для внешней стенки, в поле ***heat transfer coefficient*** нужно выбрать ***User defined***, а в поле для ввода указать значение коэффициента теплоотдачи **h1**. Чтобы учесть естественную конвекцию косвенным способом, нужно выбрать ***External natural convection*** в поле настроек для граничного условия крайней стенки, где в поле ***Wall height*** ввести значения высоты слоя, а в опции ***Fluid*** выбрать ***Air***. Если необходимо задать коэффициент для вынужденной конвекции, то нужно выбрать ***External forced convection***, где в поле ***Plate length*** нужно ввести высоту слоя, в поле ***Velocity, fluid*** ввести значение скорости потока воздуха, а в опции ***Fluid*** выбрать ***Air***.

6. Запустим расчет модели ***Study*** $\Rightarrow$ ***Compute***.

7. Построим распределение температуры в слое. Это можно сделать с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Line Graph***. Также необходимо добавить в узле ***Data Sets*** линию, по которой будет строиться распределение ***Cut Line 2D***.

8. Сравним конечную температуру на внешней поверхности слоя при задании различного коэффициента теплоотдачи.

Граничное условие третьего рода

$$q(x, y, z, t) = h(T_{ext} - T)$$

(где q – плотность теплового потока; h – теплоотдача с поверхности; T_{ext} – внешняя температура среды; T – рассчитываемая температура), описываемое с помощью коэффициента теплоотдачи, можно реализовать с помощью узла ***Heat Flux***, выбрав в настройках этого узла ***Convective heat flux***. Для настройки конвективного граничного условия, пользователь должен задать температуру внешней среды или выбрать, чтобы она определялась из значений *Ambient temperature*, определенных в настройках ***Heat Transfer in Solid***, и задать коэффициент теплоотдачи h (рис. 7.31). Если коэффициент теплоотдачи не известен, можно выбрать тип конвекции и соответствующую для него модель, описав требуемые

параметры, тогда программа сама вычислит коэффициент теплоотдачи с поверхности через числа подобия. Выбор *General inward heat flux* и *Heat rate* является аналогичным условием, как в *Boundary Heat Source*.

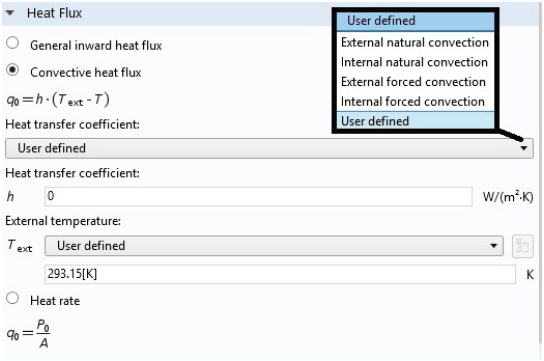


Рис. 7.31. Часть окна настроек узла ***Heat Flux***

В программе можно реализовать смешанный тип граничного условия, например, с помощью узла ***Open Boundary***. Если нормальный тепловой поток вытекает из поверхности, тогда работает условие первого рода, если направление теплового потока обратное, применяется условие второго рода, причем правая часть у него равна нулю.

Часть исследуемой области может быть значительно меньшей по сравнению со всей областью объекта, что затрудняет дискретизацию модели в этой области, причем распределение температур в ней не играет ключевую роль. Одно из решений таких задач — это описание тонких областей с помощью граничного условия. В Comsol реализован ряд таких условий. Граничное условие ***Thin Layer*** позволяет описывать тонкие слои, например, тепловой изоляции с помощью расчета эквивалентного сопротивления тепловому потоку на этой границе. Окно настроек *Thin Layer* выглядит следующим образом (рис. 7.32).

Во вкладке ***Layer type*** окна настроек ***Thin Layer*** определяется тип модели расчета данного граничного условия. Модель ***Thermally thin approximation*** подходит для описания однослойных тонких материалов. В этой модели необходимо определить толщину слоя (*layer thickness*) и основные тепловые свойства для данной границы (либо в окне настроек этого узла, либо в узле ***Materials*** для границы). Модель ***Thermally thick approximation*** хорошо подходит для описания тепловой изоля-

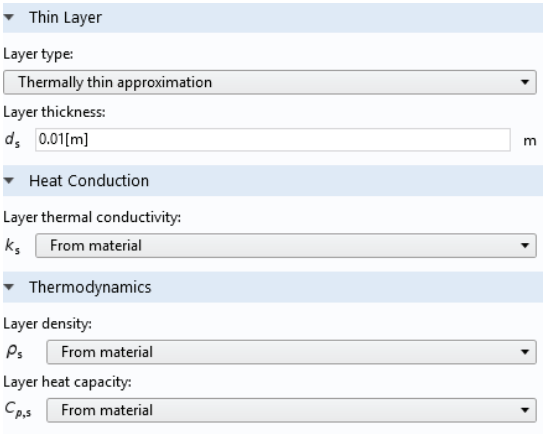


Рис. 7.32. Окно настроек ***Thin Layer***

ции, как однослойной, так и многослойной. Многослойность можно включить с помощью галочки на опции *multiple layers* и определить количество слоев. Дальше необходимо задать толщину каждого слоя и его физические тепловые свойства. При включении модели ***Surface-to-Surface*** в физическом интерфейсе ***Heat Transfer in Solid***, для данной настройки появляется возможность настроить прозрачность этой границы для электромагнитного излучения. Модель *General* позволяет также настраивать многослойную тепловую изоляцию с возможностью задания количества точек дискретизации в каждом слое, что теоретически может в некоторых задачах повысить точность расчетов.

Граничное условие ***Thin Film*** является альтернативой *Thin Layer* только для тонких жидких областей. Скорость жидкости можно задать в настройках узла для каждой координаты. Одной из важных задач в электротехнологии также является расчет тепловых режимов в контактных соединениях. Реализовать моделирование этого физического процесса можно, задав граничное условие ***Thermal Contact*** в месте контакта исследуемых областей. Настройка данного узла требует теоретических знаний процессов, протекающих при контактировании двух тел, поэтому ограничимся общим описанием возможности данного узла в нашей работе.

Важно во множестве задач правильно описать явление электромагнитного излучения. Реализация излучения осуществляется с помощью

граничных условий ***Diffuse Surface***, ***Prescribed Radiosity*** и ***Diffuse Mirror***. Последние два граничных условия доступны, если в модели ***Heat Transfer in Solid*** включить модель ***Surface-to-Surface***. Граничное условие *Diffuse Surface* без включенного модуля *Surface-to-Surface* описывает излучение энергии в окружающую среду без обмена лучистой энергией с другими телами по формуле

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \varepsilon\sigma(T_{amb}^4 - T^4), \tag{7.53}$$

где ε – излучательная способность тела; σ – постоянная Больцмана; T_{amb} – температура окружающей среды и T – температура поверхности.

При включении модели ***Surface-to-Surface***, процесс излучения происходит между поверхностями, для которых определены граничные условия, описывающие процесс электромагнитного излучения. Основные настройки этого узла показаны на рис. 7.33. На вкладке *Surface-to-Surface Radiation* можно исключить выбранную границу в расчетах обмена лучистой энергией между поверхностями, тогда эта поверхность будет просто излучать в окружающую среду энергию, как описано в формуле (7.53). Настройка ***Radiation Setting*** позволяет настроить, как будет распространяться электромагнитное излучение с поверхности. Настройка излучения ***Opacity controlled*** позволяет автоматически определить направление излучения с поверхности, зависящее от свойства окружающей среды (прозрачная или непрозрачная). Настройки излучения ***Positive side***, ***Negative side*** и ***Both side*** определяют вектор направления излучения к выбранной поверхности, а именно: положительный, отрицательный и в обе стороны. Вкладка ***Ambient*** отвечает за настройку температуры окружающей среды (***Ambient temperature***) и внешнего излучения (***Include diffuse irradiance***). Важным свойством излучения является поверхностная способность излучения (***Surface Emissivity***).

Граничное условие ***Diffuse Mirror*** является частным случаем граничного условия, реализованным с помощью узла ***Diffuse Surface***, описывающего полное отражение излучения с поверхности, когда излучательная способность равна 0. Подобным граничным условиям является также ***Prescribed Radiosity***, которое позволяет описать абсолютно черное тело (поглощает всю лучистую энергию) и серое тело.

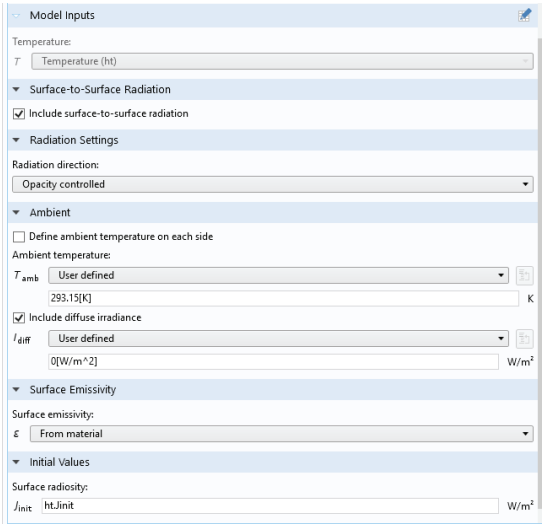


Рис. 7.33. Окно настроек ***Thin Layer***

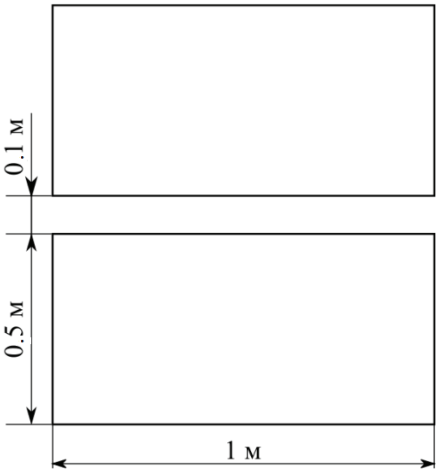


Рис. 7.34. Геометрия модели

Задача 15. Излучение

Даны две медные детали сечением 1×0.5 м (рис. 7.34). Расстояние между деталями – 0.1 м. Верхняя деталь соответствует нагревателю, нижняя — заготовке. В нагревателе задана удельная мощность 105 Вт/м^3. Температура нижней границы заготовки неизменна и составляет 20 °C. Показать распределение температуры в заготовке в установившемся режиме.

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Heat Transfer with Surface-to-Surface Radiation*** ⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже.

Name	Expression	Value	Description
HeatSource	1E5[W/m^3]	1E5 W/m³	
l	1[m]	1 m	
d	0.5[m]	0.5 m	
h	0.1[m]	0.1 m	

3. В узле геометрия ***Geometry*** создаем прямоугольники *Rectangle*, соответствующие медным деталям.

4. Добавим в узле ***Materials*** материал ***Copper***, расположенный в библиотеке ***AC/DC***.

5. В настройке физического интерфейса ***Heat Transfer with Surface-to-Surface Radiation***, в блоке ***Solid***, необходимо создать блок ***Temperature*** для задания температуры нижней поверхности заготовки. В настройках задаем параметр T_0 равным **Ts**. Далее создаем два блока *Diffuse Surface*, в первом выбираем нижнюю границу нагревателя, во втором – верхнюю границу заготовки. В каждом из них включаем пункт ***Include surface-to-surface radiation***. В пункте *Surface Emissivity* задаем для нагревателя значение **0.9**, а для заготовки — **0.1**. Затем создаем блок *Heat Source*, в котором выбираем область нагревателя и задаем величину Q_0 равной **HeatSource**.

6. Запускаем решение исследования ***Study*⇒ *Compute***.

7. Показать распределение температуры в заготовке можно с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Line Graph***. В узле ***Data Sets*** необходимо создать кривую ***Cut Line 2D***, вдоль которой планируется строить распределение. В настройках ***Cut Line 2D*** необходимо определить, из какого исследования брать решение. Делается это в настройках данного узла, на вкладке ***Data Sets***; затем в настройках графика ***Line Graph*** необходимо задать ***Cut Line 2D*** как источник данных. В окне *Expression* необходимо записать **T**.

Задача 16. Нагревательный элемент

Даны два вольфрамовых нагревательных элемента сечением 5×60 мм и алюминиевая заготовка сечением 60×60 мм. Нагреватели расположены на расстоянии 20 мм от левой и правой сторон заготовки. В вольфраме поддерживается температура 800 °C. Расчетное время нагрева – 1200 с. Показать изменение температуры заготовки во времени.

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Heat Transfer in Solids*** ⇒ ***Time Dependent***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для данной задачи, например, как показано на ниже.

Name	Expression	Value	Description
Ts	800[degC]	1073.2 K	
a	60[mm]	0.06 m	
b	5[mm]	0.005 m	
c	20[mm]	0.02 m	

3. В узле ***Geometry*** создаем прямоугольники *Rectangle*, соответствующие нагревателям, заготовке и окружающему воздуху.

4. Добавим в узле ***Materials*** материалы ***Air***, ***Al – Aluminium / Aluminium*** и ***Tungsten*** из библиотеки материалов. ***Air*** расположен в ***Liquids and Gases / Gases***, ***Al — Aluminium / Aluminium*** — в ***MEMS / Metals***, а ***Tungsten*** — в ***Built-In***. Выбрав для каждого материала соответствующую ему область пространства, перейдем к настройкам физического интерфейса.

5. Добавим модель лучистого теплообмена между поверхностями. Для этого в настройках физического интерфейса ***Heat Transfer in Solid*** активируем опцию с помощью галочки напротив *Surface-to-Surface radiation*.

6. В физическом интерфейсе ***Heat Transfer in Solid***, в блоке ***Solid***, необходимо добавить еще один подузел ***Opacity***, для которого определим область воздуха; в его настройках параметр ***Opacity*** выбирается равным *Transparent*, что позволяет смоделировать прозрачность среды воздуха для лучистого теплообмена. Далее необходимо создать блок ***Temperature*** для задания температуры поверхности вольфрама. В настройках задаем параметр T_0 равным **Ts**, затем создаем два блока ***Diffuse Surface***. В первом выбираем границы нагревателя, во втором – границы заготовки. В каждом из них включаем пункт ***Include surface-to-surface radiation***. В пункте ***Surface Emissivity*** задаем для нагревателя **0.1**, а для заготовки **0.9**.

7. Для осуществления расчетов на заданном промежутке времени с шагом 60 с необходимо записать в параметре *Times*, в настройках исследования ***Study 1/Step 1***: ***Time Dependent***: **range(0,60,1200)**.

8. Запускаем решение исследования ***Compute***.

9. В блоке ***Derived Values*** выбираем ***Surface Average***, в котором принимаем за область вычисления заготовку, и записываем в графе *Expression* параметр **T**. После нажатия кнопки ***Evaluate*** в блоке ***Tables*** будет создана новая таблица. Для построения графика изменения температуры создаем ***1D Plot Group***, добавив в него ***Table Graph***. В настройках ***Table Graph*** выбираем созданную ранее таблицу и нажимаем кнопку ***Plot***.

Глава 8.

Связка физических интерфейсов

Ознакомившись с основным функционалом физических интерфейсов, отвечающих за моделирование электромагнитного и теплового полей, стоит ознакомиться с возможностями связки, передачи данных из одного модуля в другой, которые реализованы в Comsol Multiphysics. В данной работе коснемся связок только для физических интерфейсов из модулей ***Heat Transfer*** и ***AC/DC***. Для этого в Comsol реализована ветка ***Multiphysics***, в которой доступны функции добавления различных узлов, устанавливающие связку между физическими интерфейсами.

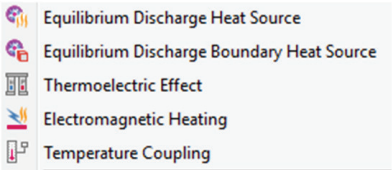


Рис. 8.1. Набор связок физических интерфейсов из модулей *AC/DC* и *Heat Transfer*

Для физических интерфейсов из перечня ***AC/DC*** и ***Heat Transfer*** доступны следующие связки (рис. 8.1). Узлы связки ***Equilibrium Discharge Heat Source*** и ***Equilibrium Discharge Boundary Heat Source*** моделируют выделение тепла в области и на границах за счет физического явления разряда зарядов. Окно настроек показано на рис. 8.2. На вкладке ***Domain Selection*** окна настроек необходимо задать области, в которых будет определено тепловыделение. На вкладке ***Equation*** показано уравнение, на основе которого будут производиться вычисления, причем отображаемое выражение будет изменяться при включении или отключении опций: *Heat Source Components* – тепло за счет переноса энтальпии (*Include*

enthalpy transport), учета тепловыделения Джоуля (*Include Joule heating*) и тепловыделения за счет излучения (*Include volumetric net radiation loss*). На вкладке ***Coupled Interfaces*** указывается, какие физические интерфейсы связываются в этой модели.

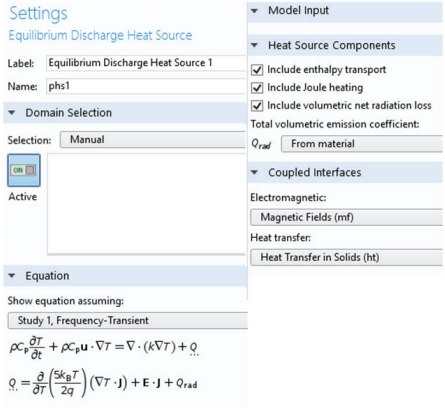


Рис. 8.2. Окно настроек ***Equilibrium Discharge Heat sources***

Связка ***Thermoelectric Effect*** позволяет учитывать наличие дополнительных токов или образование зарядов за счет градиента температур. На основе данного явления работают термопары. В настройках этого узла, в ***Domain Selection***, необходимо определить, для каких областей будет определен этот узел, а в ***Boundary Selection*** - для каких границ. На вкладке ***Coupled Interfaces*** показывают, между какими интерфейсами реализована связка, причем первый интерфейс указывает, откуда передаются результаты, а второй – куда.

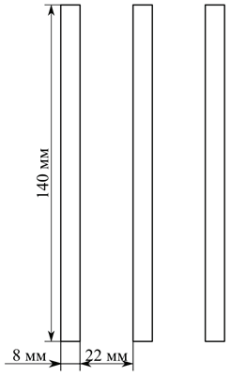
Множество задач требует учитывать влияние электромагнитных свойств от температуры, для этого служит мультифизическая связка ***Temperature Coupling***. Основное назначение данной связки - передавать значение температуры из тепловой задачи в магнитную. Существуют особенности реализации этой связки для моделей, в которых магнитная задача реализована, например, в стационарной или квазистационарной постановке, а температурная – в динамике. Эти особенности связаны с настройками решателя и типов исследования. В настоящей работе описание данного материала опускается из-за необходимости описания множества нюансов работы с решателями в данной программе.

Основной связкой для электротехнологических и электромеханических установок является нагрев за счет джоулева тепла и потерь на гистерезис. Такая связка, моделирующая тепловыделение за счет протекание токов, реализуется с помощью узла ***Electromagnetic Heating***. Как и для ***Thermoelectric Effect***, в настройках необходимо определить области и границы, на которых эти значения будут вычисляться. Окно ***Equation*** показывает, с помощью каких выражений рассчитываются источники тепла. На вкладке ***Coupled Interfaces***, как и в других связках, указывается, из какого интерфейса берутся значения и в какой передаются.

Еще один способ связи интерфейсов – вручную прописывать требуемые переменные из других физических интерфейсов в места модели, где это необходимо, например тепловыделение из магнитной задачи в тепловую. Способы создания ссылок были описаны в конце главы «Интерфейс Comsol Multiphysics».

Задача 17. Нагрев шинопроводов

Шинопровод выполнен из алюминия. Геометрия модели представлена на рисунке ниже. Действующее значение тока в шинопроводе – 1 кА, частота тока – 50 Гц. Рассчитать распределение плотности тока и температуры по сечению шинопровода при нагреве в течение 1200 с.



Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields***, ***Heat Transfer in Solids*** ⇒ ***Frequency Domain***.

2. В узле ***Parameters*** введем основные данные, требуемые для решения задачи, и рассчитаем токи каждой фазы, например, как показано ниже. Название переменной для обозначения частоты – ***freq***.

Name	Expression	Value	Description
a	140[mm]	0.14 m	
b	22[mm]	0.022 m	
c	8[mm]	0.008 m	
d	1[m]	1 m	
I	1[kA]	1000 A	
freq	50[Hz]	50 Hz	
Ia	I*sqrt(2)	1414.2 A	
Ib	I*sqrt(2)*exp(-j*2*pi/3)	(-707.11-1224....	
Ic	I*sqrt(2)*exp(j*2*pi/3)	(-707.11+1224...	

3. В узле ***Geometry*** создаем модель, показанную на рисунке на с. 178, используя прямоугольники (***Rectangle***).

4. Добавим в узле ***Materials*** материалы ***Air*** и ***Al – Aluminium*** / ***Aluminium*** из библиотеки материалов. ***Air*** расположен в библиотеке ***Liquids and Gases/Gases***, а ***Al – Aluminium*** / ***Aluminium*** – в ***MEMS*** / ***Metals***.

5. В настройке физического интерфейса ***Magnetic Fields*** необходимо добавить три блока *Coil*, в каждом из них нужно выбрать одну из фаз шинопровода и записать соответствующее значение тока в параметре *Coil current*.

6. В узле ***Multiphysics*** добавим ***Electromagnetic Heating***.

7. В узле ***Study***, в параметрах ***Frequency-Domain***, добавляем частоту ***freq*** и выбираем в ***Physics and Variables Selection*** элементы ***Magnetic Fields***. Далее добавим в узел ***Study*** второй шаг расчетов ***Time Dependent***, в котором зададим в параметре *Times* расчетное время модели с помощью выражения **range(0,60,1200)**, что соотвествует записи результатов расчетов каждые 60 с в течение 1200 с. После этого выбираем в ***Physics and Variables Selection*** элементы ***Heat Transfer*** и ***Electromagnetic Heating***.

8. Запускаем решение исследования, нажав на кнопку ***Compute***.

9. Для получения картины плотности тока и температуры используем блоки ***2D Plot Group***, добавив в них ***Surface***. В узле *Expression* нужно записать ***mf.normJ*** для плотности тока или ***T*** для температуры.

Задача 18. Кондукционый нагрев

Найти конечную температуру медного круглого проводника диаметром $d = 0.02$ м, по которому в течение 1.5 с протекает ток $I = 32$ кА, если в начальный момент времени проводник находился в спокойном воздухе при температуре $t_н = 0$ °C, а коэффициент теплоотдачи с его поверхности $h = 17$ Вт/(м^2·К). Удельное сопротивление меди $\rho_э = 1.75{\cdot}10^{-8}$ Ом·м, относительная магнитная проницаемость – 1, относительная электрическая проницаемость – 1, плотность меди $\rho = 8900$ кг/м^3, теплоемкость меди $C = 385$ Дж/(кг · °C).

Создание модели:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields***, ***Heat Transfer in Solids*** ⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано ниже.

Settings

Parameters

Label: Параметры

Parameters

Name	Expression	Value	Description
d	0.02[m]	0.02 m	радиус провода
I	32[kA]	32000 A	сила тока
Tn	0[degC]	273.15 K	начальная температура
h1	17[W/(m^2*K)]	17 W/(m^2·K)	коэффициент теплоотдачи
sigma	(1.75E-8)^-1[S/m]	5.7143E7 S/m	электрическая проводимость
ro	8900[kg/m^3]	8900 kg/m^3	плотность меди
C	385[J/(kg*K)]	385 J/(kg·K)	теплоемкость меди
lmd	402[W/(m*K)]	402 W/(m·K)	коэффициент теплопроводности меди

3. Добавим расчет средней температуры проводника ***Definitions*** ⇒ ***Component Coupling*** ⇒ ***Average***, где необходимо выбрать область проводника. Также нужно добавить переменную средней температуры с выражением ***aveop1(T)*** в ***Definitions*** ⇒ ***Variables***.

4. Построим окружность (***Circle***), где в поле ***Radius*** введем значение половины диаметра провода.

5. Зададим свойства материалов ***Materials*** $\Rightarrow$ ***Blank Material***, выберем область провода, затем введем значение относительной магнитной проницаемости (***Relative permeability***), электрическую проводимость меди (***Electrical conductivity***), относительную электрическую проницаемость (***Relative permittivity***), значение коэффициента теплопроводности (***Thermal conductivity***), плотности слоя (***Density***), а также значение теплоемкости (***Heat capacity***).

6. Зададим ток проводника в физике ***Magnetic Fields***, используя узел ***Coil***. В настройках этого узла выберем тип катушки ***Conductor mode*** как ***Single conductor***, а тип возбуждения поля ***Coil excitation*** как ***Coil current*** со значением тока из условия задачи.

7. Зададим граничные условия *Heat Flux* на границах проводника в физике ***Heat Transfer***. В настройках этого узла, на вкладке ***Heat Flux***, выберем опцию *Convective heat flux*, поставив напротив нее галочку. Далее в настройках этой опции выберем ***User defined*** из ряда предлагаемых способов задания коэффициента теплоотдачи ***heat transfer coefficient***, а в поле для ввода укажем значение коэффициента теплоотдачи.

8. В узле ***Multiphysics*** нажатием правой кнопки мыши необходимо добавить узел ***Electromagnetic Heating***.

9. Необходимо добавить шаг (*Step*) в решатель, нажав правую кнопку мыши на ***Study*** $\Rightarrow$ ***Study Steps*** $\Rightarrow$ ***Time-Dependent***. В шаге ***Stationary*** оставить выбранной только физику ***Magnetic Fields***, а в шаге ***Time-Dependent*** – только физику ***Heat Transfer***. В поле *Times* (в шаге ***Time-Dependent***) необходимо записать следующее условие: ***range(0,0.1,1.5)***.

10. Рассчитаем модель ***Study*** $\Rightarrow$ ***Compute***.

11. Построим распределение напряженности магнитного поля в проводнике. Это можно сделать с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Line Graph***. Также необходимо добавить в узле ***Data***

Sets линию, по которой будет строиться распределение ***Cut Line 2D***. Нужно построить y-составляющую магнитного поля (**mf.Hy**) для любого момента времени.

12. Построим изменение температуры во времени. Это можно сделать с помощью ***1D Plot Group***, добавив в него ***Global***, где в поле *Expression* ввести название переменной средней температуры проводника, а в графе *Unit* написать: **degC** (отображенные значения будут в градусах Цельсия, а не в кельвинах).

Глава 9.

Типы исследования

В данном разделе работы ознакомимся с основными функциями и возможностями глобального узла дерева модели ***Study***. Стоит отметить, что функционал данного узла достаточно широкий и он расширяется с каждой новой версией программы. Ряд опций, например настройки решателя, требуют глубокого знания математики, поэтому в данной работе предлагается рассмотреть только основные прикладные опции программы, реализованные для данного узла, которые в первую очередь необходимы пользователю и помогут существенно облегчить процесс моделирования. Внимание будет акцентировано на основные типы исследования. Из рассмотрения будут опущены такие вопросы, как настройка решателя, специфические типы исследования, предназначенные для узкого спектра задач исследований, и ряд продвинутых опций, например кластерное вычисление или оценка влияния параметров на какие-либо функции.

9.1. Назначения узла *Study*

Главная задача узла ***Study*** – описать тип исследуемой задачи: в каком виде будут представлены уравнения, описывающие исследуемые процессы с точки зрения математики, а также каким способом они будут решены. Этот узел служит для описания диапазона параметров, требуемых для исследования, таких как частота и время, и способа их задания. В ряде задач можно реализовать автоматизированное решение с несколькими различными параметрами.

9.2. Структура узла *Study*

Узел ***Study*** может содержать несколько подузлов, чаще всего их называют шагами (*Steps*). Порядок расположения каждого шага в дереве модели будет влиять на порядок их запуска при вычислениях. Приведем простой пример. Необходимо посчитать нагрев пластины из-за явления Джоуля–Ленца. Нужно рассчитать электромагнитную задачу, в которой будет получено количества тепла, выделяемого в пластине, а затем это значение перенести в расчет тепловой задачи. В таком случае в Comsol будет необходимо сначала провести расчет электромагнитного поля, а затем только температурного. В противоположном случае в модели не будет известен источник тепла.

9.3. Классификация типов исследования и их описание

В программе Comsol Multiphysics реализовано около сотни типов исследований, и с каждой версией набор этих исследований увеличивается. Большинство из них являются узконаправленными и служат для анализа конкретных задач и физических интерфейсов. Наиболее используемые типы исследования, применяемые для задач электротехники и электротехнологий, являются ***Stationary*** (стационарная), ***Time-Dependent*** (зависимая от времени), ***Frequency-Domain*** (квазистационарная) и ряд вспомогательных. Рассмотрим более детально каждый из них.

Окно настроек любого типа исследования имеет одинаковый функционал, за исключением вкладки *Study Settings*. Настройка этой вкладки зависит от типа выбранного исследования. Все типы исследования содержат вкладку ***Results While Solving***, которая позволяет при ее активации выводить на экран получаемые результаты во время процесса решения задачи, что часто является необходимым, чтобы отслеживать корректность получаемых результатов. Следующая вкладка ***Physics and Variable Selection*** позволяет определить, какой физический интерфейс будет решаться с помощью данного типа исследования. При активации опции ***Modify model configuration for study step***, в этом окне появится дерево модели физических интерфейсов, в котором можно отключать

(включать) узлы с помощью правой кнопки мыши и далее ***Disable***, ***Enable***, причем отключение или включение будет справедливо только для данного шага. Вкладка ***Values of Dependent Variables*** отвечает за набор данных для первоначального решения (*Initial values of variables solved for*) значений переменных, которые не решены в этом исследовании (*Values of variable not solved for*). Например, если уже есть набор решений, который может служить либо первоначальным шагом, либо близким к искомому, можно с помощью этой настройки его задать. Другой пример – распределение усилий, рассчитанное в другом шаге или типе исследования, можно использовать в данном шаге, тогда необходимо это указать в ***Value of variables not solved for***. Вкладка ***Mesh Selection*** позволяет определить, для какой сетки проводить такое исследование. Вкладка ***Study Extensions*** служит в большинстве случаев для ускорения сходимости задач. Задачи, содержащие нелинейности, не всегда могут быть решены численно, один из способов поиска их решения – это постепенно увеличивать нелинейность. В этой вкладке можно настроить исследование таким образом, что выбранный параметр, например ток, будет изменяться от небольшого значения до требуемого пользователем, причем каждое следующее исследование (с бóльшим значением тока) будет брать первоначальное значение распределения поля из предыдущего решения. Такой подход во многих задачах существенно позволяет ускорить сходимость решения задач.

Тип исследований ***Stationary*** предназначен для анализа стационарных и установившихся режимов. Производные по времени равны нулю в уравнениях, решаемых в этом типе исследования. Окно настроек *Study Settings* пустое для данного типа исследования. Тип исследований ***Time-Dependent*** предназначен для описания динамических режимов. Окно ***Study Settings*** служит для описания временного диапазона исследования. Единицы измерения времени можно выбрать на вкладке ***Time unite***. В окне ***Times*** можно записать диапазон сохраняемых в решении временных точек, временной шаг решателя может существенно отличаться от заданного диапазона в этом поле. Тип исследований ***Frequency-Domain*** предназначен для описания режимов, в которых явления подчиняются гармоническому закону. Примером тому может служить электромагнитное установившееся синусоидальное поле. В окне ***Study Settings*** необходимо ввести частоту или диапазон требуемых для исследования частот по аналогии с ***Time-Dependent***.

Во многих задачах, например в исследовании индукционного нагрева, удобно использовать гибридные решатели, которые одновременно решают и магнитную задачу с помощью ***Frequency-Domain***, и температурное поле с помощью ***Time-Dependent*** или ***Stationary***. Для этого в Comsol реализованы такие типы исследования, как ***Frequency-Transient*** и ***Frequency-Stationary***. Главным отличием использования такого гибридного типа исследования от вышеупомянутых исследований является возможность учитывать изменения переменных в электромагнитной задаче в процессе расчета температурного поля как частный случай. Такая реализация называется сильносвязанной задачей. Слабосвязанная формулировка задачи реализуется с помощь пошагового исследования, например на первом шаге решается один физический интерфейс и передает ряд данных на второй шаг решений.

В процессе проектирования инженеры могут столкнуться с проблемой анализа задач с большим количеством параметров, например различных значений тока или конструкционного параметра. Такие задачи при ручном переборе требуемых параметров занимают большое количество времени. Существенно сократить время расчета может автоматизация данного процесса. Разработчики Comsol Multiphysics реализовали такую возможность с помощью дополнительного шага ***Parametric Sweep***. Окно настроек данного шага исследования имеет две основные вкладки – *Study Settings* и *Output While Solving*. В окне ***Study Settings*** задаются параметры, которые будут перебираться во время решения. Для добавления параметров необходимо нажать на иконку плюсика в этом окне (рис. 9.1).

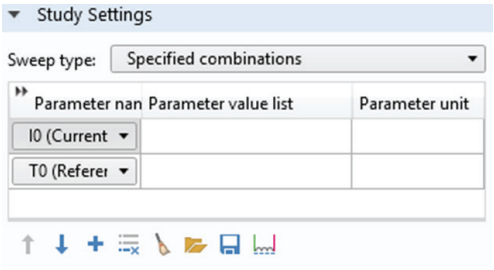


Рис. 9.1. Окно настроек ***Parametric Sweep***

Для добавления параметров в эти настройки они должны быть изначально определены в глобальном узле ***Parameters***, также можно

в этой вкладке определить тип перебора параметров ***Specified combinations*** и ***All combinations***. Тип перебора параметров ***All combinations*** будет перебирать заданные параметры, каждую пару друг с другом. *All combinations* будет создавать поочередные пары, как они указаны в листе параметров, причем размер листа параметров у каждого параметра должен быть одинаковый, например, если ширина паза задана с помощью пяти разных значений этого параметра, а кроме того, требуется перебирать и значение тока, и количество значений параметра тока должно быть равно пяти.

Глава 10.

Постобработка результатов. Узел *Results*

В данной части работы предлагается ознакомиться с возможностями обработки и представления полученных результатов в программном обеспечении численного моделирования Comsol Multiphysics. Данная программа имеет широкий спектр представления результатов, начиная от построения картины поля с помощью многомерных графиков и векторов, заканчивая одномерными графиками. Существует возможность оценить как полевые величины, так и интегральные. Представление результатов в виде таблиц и их экспорт позволяет существенно облегчить анализ ряда результатов.

Блок ***Results*** имеет следующую структуру:

- узел ***Parameters*** служит для задания значений параметров для вычислений в блоке ***Results*** по аналогии с глобальным узлом ***Parameters***;
- узел набора данных ***Data Sets*** содержит доступные пользователю решения модели;
- узел ***Views*** – настройка видов отображения результатов;
- узел ***Derived Values*** отвечает за проведение математических операций над рассчитанными значениями;
- узел ***Tables*** хранит таблицы с полученными результатами;

- узел ***3D Plot Group*** – набор трехмерных графиков;
- узел ***2D Plot Group*** – набор двухмерных графиков;
- узел ***1D Plot Group*** – набор одномерных графиков;
- узел ***Export*** отвечает за экспорт данных, рисунков и других элементов модели во внешнюю среду компьютера;
- узел ***Reports*** отвечает за создание пользовательских и автоматических отчетов о модели в формате *HTML* или *Microsoft*® *Word*®.

Узел ***Parameters*** дублирует функцию глобального узла ***Parameters*** с учетом того, что параметры в этом узле будут определены только для блока ***Results***. Удобно использовать данные параметры, когда нужно ввести в расчет какую-либо новую величину, но без пересчета задачи, потому что в блоке ***Results*** будут определены только те параметры, которые были записаны до решения задачи. Узел ***Views*** является аналогом такого же узла, реализованного в *Comsol* в ***Definitions***, только он будет работать для блока ***Results***.

10.1. Набор данных. Узел *Data Sets*

Все решения моделей отображаются в узле ***Data Sets***. Любое исследование после любого решения создает набор данных результатов ***Solution***, которые зависят от различных параметров, например от выбранного решателя и компонент, к которому применяется решение. Так, если решалась температурная задача в зависимости от времени для двухмерной постановки, узел ***Solution*** будет хранить массив данных распределения температур в пространстве для сохраненных временных точек. На основе данного решения будут вычисляться остальные параметры, к примеру, тепловые потоки, поэтому, если в модели имеется несколько данных с решениями при вычислении какой-либо величины или построения графиков, необходимо корректно выбрать (сослаться на) массив решений, из которых эти данные будут браться. При нажатии правой клавишей на узел ***Solution*** появится возможность создать подузел ***Selection***, который позволяет определить области, для которых этот набор данных будет определен. Ряд задач требуют оценить качество, размер или тип сетки; информация о сетках модели хранится в ***Mesh***. По

умолчанию программа не создает данный узел, поэтому его необходимо добавлять самостоятельно. Можно также производить ряд математических операций с массивами данных, создавая новое решение с помощью узла ***Join***. Для этого в узле ***Data Sets*** добавляем ***Join***, в окне настроек выбираем два набора данных, над которыми будем производить математические операции. На вкладке ***Combination***, в поле ***Method*** окна настроек узла ***Join***, выбираем математическую операцию:

- ***Difference*** – вычитание (*data1-data2*);
- ***Norm of difference*** – разность модулей, определителей или метрик матрицы данных (*abs*(*data1-data2*));
- ***Explicit*** – сумма явных переменных;
- ***General*** – можно прописать собственное выражение математических действий над массивами данных;
- ***Product*** – умножение (*data1***data2*);
- ***Quotient*** – деление (*data1*/*data2*);
- ***Sum*** – сумма (*data1*+*data2*).

Программа Comsol Multiphysics является достаточно удобной в обработке результатов ввиду возможности создавать выборки на основе основного решения по различным параметрам, например: пространственным переменным, временным и ряду других. Все доступные типы выборок показаны на рис. 10.1. Представим их классификацию и разберем их основное назначение и функционал.

Стоит начать с узлов, создающих выборки результатов для заданной пользователем области пространства из набора данных ***Data Sets***. К данным узла относятся ***Cut Plane***, ***Cut Line 3D***, ***Cut Point 3D***, ***Cut Line 2D***, ***Cut point 2D***, ***Edge 3D***, ***Surface***, ***Edge 2D***, ***Cut Point 1D***. Все эти операции создают набор новых данных из ранее определенного набора данных, который будет определен только в заданной области геометрии для данного узла, причем набором данных будет служить сам узел, выполняющий эту операцию. Настройка узлов (операций) практически идентична для всех этих узлов: необходимо описать требуемое

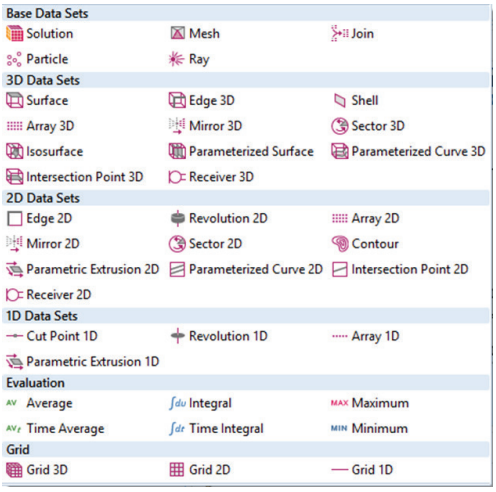


Рис. 10.1. Типы выборок результатов данных

геометрическое пространство (плоскость, кривая, точка) с помощью простого выбора его на геометрии (как, например, для ***Surface***) или задания в виде значений координат (как для ***Cut Line 2D***), а затем определить, из какой выборки или набора данных решений брать данные в настройках *Data set*.

Наглядность представления результатов существенно упрощает объяснение многих сложных физических явлений, поэтому часто перед учеными и инженерами встает задача наглядно и качественно представить свои результаты. Ряд операций, реализованных в Comsol Multiphysics, позволяет повысить качество представления результатов в процессе, например, вращения выборки данных определенной области или смещения ее в пространстве. Можно в отдельную группу выделить следующие узлы: ***Mirror 3D***, ***Mirror 2D***, ***Sector 3D***, ***Sector 2D***, ***Array 3D***, ***Array 2D***, ***Array 1D***. Узлы *Mirror* зеркально отображают выборку данных для какого-либо пространства. Эти опции программы упрощают визуализацию результатов задач с явной симметрией физических явлений в пространстве. Узел *Sector* создает дополнительную выборку из определенной ранее, копируя ее по окружности с заданным количеством секторов. Функция *Array* позволяет размножать выборки данных в пространстве массивом. К этим же функциям, работающим с выборками данных в пространстве, можно отнести ***Revolution 2D*** и ***Revolution***

1D. Эти функции позволяют вращать набор данных на заданный угол. Такой подход удобен для представления результатов осесимметричных задач, когда можно полученные результаты на плоскости вращать с помощью функции ***Revolution 2D*** и получить трехмерное отображение результатов. Подобная функция ***Shell*** позволяет создавать со смещением в пространстве поверхности выбранного набора данных.

Ряд задач удобно анализировать, когда поверхность, кривая или точка изменяет свое положение в пространстве в зависимости от какого-либо требуемого параметра, например времени. Такую выборку с подвижными геометрическими кривыми можно создать с помощью ***Parametrized Surface***, ***Parametrized Curve 3D***, ***Parametrized Curve 2D***.

Помимо создания выборок из пространства, в Comsol можно реализовать выборки из значений переменных с помощью функций ***Isosurface*** и ***Contour***. Например, если требуется создать поверхность, в которой температура равна 200 °C, то это можно реализовать с помощью этих двух узлов.

Параметрические задачи удобно анализировать, если предварительно создать ***Parametric Extrusion 2D*** или ***Parametric Extrusion 1D***. Эти функции позволяют создать дополнительную протяжку выборки данных по одному из параметров, для которого задача была решена, например по набору частот, моментов времени.

Стоит выделить блок *Evaluation* (см. рис. 10.1). Данные функции позволяют создавать выборки средних, интегральных, максимального и минимального значений пространства и времени. Полезен также блок *Grid*, позволяющий создавать набор точек, в которых будут определены значения из выборки. Такой подход удобно использовать, когда необходим дискретный анализ в каких-то точках пространства, определенных сеткой.

10.2. Вспомогательные вычисления. Узел *Derived Valuesf*

Практически любое исследование подразумевает под собой оценку каких-либо интегральных показателей (усилие, полный ток и т. д.), максимального и минимального значения любой физической величины

(температуры в объеме или минимального давления), расчет выражений (например, КПД или коэффициента мощности) и ряд других сопровождающих математических операций, которые позволяют численно оценить исследуемые явления. Данные операции проводятся в узле ***Derived Values***, и полученные значения сохраняются в виде таблиц в узле ***Tables***. Разберем более подробно возможности блока ***Derived Values***.

Global Evaluation предназначен для вычисления значения глобальной переменной или выражения, состоящего из глобальных переменных. Для расчета необходимо выбрать набор данных, из которых будет заданное выражение рассчитываться на вкладке ***Data set*** (рис. 10.2). Далее необходимо написать выражение или добавить уже существующую переменную из предложенного программой перечня, нажав на кнопки , или в окне ***Expression*** окна настроек ***Global Evaluation***. Заданных выражений в окне ***Expression*** для расчета может быть несколько. Выражения можно подгружать из внешних файлов или сохранять во внешних файлах с помощью кнопок ***Load from file*** и ***Save to file***. Для расчета необходимо нажать кнопку ***Evaluate*** в верхнем левом углу окна настроек, после этого создастся новая таблица с данными в узле ***Tables***, в которой будут отображены данные значения. При следующем нажатии кнопки ***Evaluate*** новые результаты будут записываться в эту же таблицу. При необходимости записать новые расчеты в другую таблицу можно нажать на черный треугольник рядом с кнопкой ***Evaluate*** и выбрать таблицу из уже существующих, в которую будут записаны вычисления, или нажать ***New Table***, тогда вычисления будут записаны в новую таблицу.

Оценка значения в определенной точке можно осуществить с помощью узла ***Point Evaluate***. Окно настроек, как у ***Global Evaluation***, за исключением того, что необходимо определить в окне ***Selection*** точки, в которых будет рассчитываться выражение. Если выборка данных, указанная в ***Data Set*** этого узла, определена для каких-либо точек геометрии, тогда окно *Selection* отсутствует и значения будут оцениваться в точках, определенных для выбранной выборки.

Посчитать среднее значение, взять интеграл или определить максимум (минимум) рассчитанной переменной какой-либо области модели можно с помощью функций ***Average***, ***Integration***, ***Minimum***, ***Maxi-***

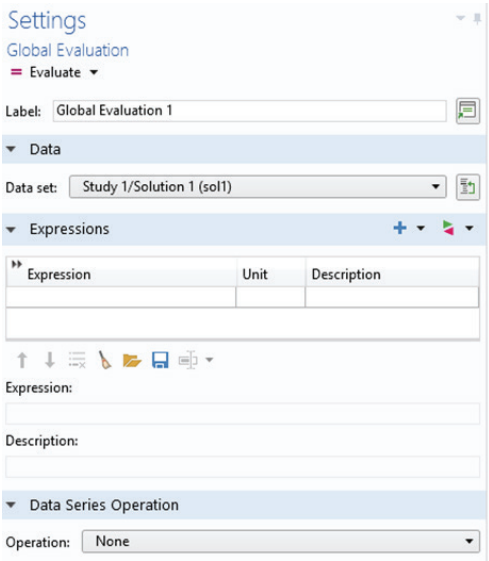


Рис. 10.2. Окно настроек узла ***Global Evaluate***

mum. Каждую функцию можно применять для границ (***line***), поверхности (***surface***) и объема (***volume***). Окно настроек выглядит практически, как и для *Point Evaluate*. Необходимо определить геометрическую часть, для которой будет выполняться данная операция, написать выражение во вкладке ***Expression*** и нажать ***Evaluate*** в верхнем углу окна настроек данного узла. Стоит отметить что, при решении осесимметричных задач, можно в настройках этого узла поставить галочку напротив *Compute volume integral*, после чего данный узел будет рассчитывать объемный интеграл с учетом того, что рассчитываемая переменная постоянна по углу вращения.

10.3. Типы графиков

Представление результатов вычислений значительно упрощается во многих задачах с помощью построения графиков. Программное обеспечение Comsol позволяет создавать следующие наборы графиков:

- ***3D Plot Group*** – трехмерные графики;

- ***2D Plot Group*** – двухмерные графики;
- ***1D Plot Group*** – одномерные графики;
- ***Polar Plot Group*** – графики в полярных координатах;
- ***Smith Plot Group*** – диаграммы Смита.

В каждом из вышеперечисленного набора графиков можно создавать один и более типов графиков. Например, в трехмерных графиках можно создать распределение величины на поверхности или в объеме одновременно с представлением этой же величины или любой другой, рассчитанной для этой модели, с помощью векторов в пространстве. Программа Comsol позволяет даже для двухмерных задач создавать трехмерные графики. Одной из таких возможностей является создание новых выборок результатов. Приведем пример: после решения параметрической двухмерной задачи создан набор решений. Этот набор решений доступен только для двухмерных графиков, но если с помощью ***Parametric Extrusion 2D*** создать новый набор решений, где третьей координатой будет один из параметров, новый набор данных можно использовать для построения трехмерных графиков. Этим функционал построения графиков программы Comsol не ограничивается.

Следует разобрать основные типы графиков, а также их настройки, а именно: одномерные, двухмерные и трехмерные типы графиков. Диаграммы Смита и построение графиков в полярных координатах в данной работе опускаются. Однако перед разбором различных типов графиков, целесообразно рассмотреть основные настройки узлов ***3D Plot Group***, ***2D Plot Group***, ***1D Plot Group***.

Опции *Data*, *Title* и *Plot Settings* являются одинаковыми для всех трех наборов графиков в окне настроек. В окне ***Data*** указывается ссылка на набор данных результатов для построения графиков. Стоит отметить, что в подузлах (типах графиков) набора данных результатов можно будет изменить эту настройку. В окне ***Title*** настраивается отображаемый заголовок графика. Вкладка ***Plot Settings*** отвечает за настройку отображения, например, какой вид будет использоваться для графика, будут ли отображаться грани геометрии, каким цветом и т. д. Для двух- и трехмерных графиков доступна настройка шкалы (*Color Legend*). Для одномерных графиков доступны настройки осей (*Axis*) и сетки (*Grid*).

10.4. Трехмерные и двухмерные графики

Узел ***Volume*** создает распределение внутри трехмерной области. Данные, по которым будет строиться график, можно определить на вкладке ***Data Set*** окна настроек; по умолчанию установлена настройка *From parent*, которая означает, что будет браться тот набор данных результатов, который определен в родительском узле ***3D Plot Group***. В поле *Expression* вводится переменная, которая будет построена, а в поле *Unit* – единицы измерения этой переменной. На вкладке ***Range*** можно определить максимальный диапазон отображаемых данных и цвета на графике. Вкладка ***Coloring and Style*** отвечает за настройку цветовой палитры для отображаемых данных. При нажатии в дереве модели на дочерний узел ***Volume*** можно добавить три функции: ***Selection***, ***Filter*** и ***Deformation***. Подузел ***Selection*** определяет, для каких областей геометрии будет построен этот график. Функция ***Filter*** позволяет с помощью логических выражений исключать часть данных из построения узла. Опция ***Deformation*** позволяет смещать и деформировать геометрию в пространстве, что особенно актуально для задач механики. Стоит добавить, что подузлы ***Selection***, ***Filter*** и ***Deformation*** доступны во многих типах графиках и их назначение такое же, как у описанных узлов выше, поэтому в последующем объяснение, описание и возможности данных функций для других типов графиков опускаются.

Тип графика ***Surface*** позволяет построить распределение выбранной величины в ***Expression*** на поверхностях геометрии. Остальные настройки данного узла подобны описанным для узла ***Volume***. Похожим типом графика ***Surface*** является ***Line***, который предназначен для описания выбранной переменной на границах (прямой). Для построения распределения рассчитанных величин на поверхности в двухмерных плоскостях, в Comsol реализован график ***Surface***. Настройка узла является идентичной описанной для поверхностного графика ***Surface*** для трехмерных графиков с одним лишь отличием, что существует возможность для этого типа графика создать поверхностный график с тремя координатами с помощью дочернего узла ***Surface with Height***.

График ***Slice*** создает распределение выбранной переменной в плоскостях. Количество плоскостей и то, в каких осях эти плоскости будут размещаться, определяются в окне настроек данного узла, на вкладке ***Plane data***. Узел ***Isosurface*** позволяет создать график плоскости

с одним и тем же значением выбранной переменной. В окне настроек, на вкладке ***Levels***, при выборе ***Entry method***, настройки ***Numbers of levels*** позволяют задать количество изоповерхностей в пространстве. Настройка ***Levels*** для ***Entry method*** позволяет задавать значения переменной, по которым будут строиться поверхности.

Типы графиков ***Arrow Volume***, ***Arrow Surface***, ***Arrow Line*** позволяют представить векторные величины с помощью направленных стрелочек в объемах, на поверхностях или вдоль линий. Для этого необходимо в поле *Expression* окна настроек узла задать значение переменной по трем координатам. Плотность отображения векторов в объеме ***Arrow Volume*** можно задать в поле *Arrow positioning* с помощью количества точке (***Number of points***) или набора координат (***Coordinates***). Цвет и стиль векторов настраивается в окне ***Coloring and Style***. Плотность стрелок на поверхностях и границах задается в окне настроек ***Coloring and Style***, в поле ***Number of arrows***. Размер стрелок можно увеличить либо уменьшить с помощью коэффициента масштабирования (***Scale factor***) в ***Coloring and Style***. Также по аналогии с графиками трехмерных векторов, для двухмерного набора графиков реализуются с помощью ***Arrow Surface*** векторы на поверхности и ***Arrow Line*** векторы по границам. Для их описания необходимо задать проекции переменных по двум координатам. Цвет вектора может соответствовать юбому скалярному значению рассчитанной переменной и отображаться с помощью цветовой шкалы на этом графике. Для этого необходимо нажать правой кнопкой мыши на узле стрелок в дереве модели и добавить ***Color Expression***, затем написать название скалярной переменной, на основе которой вектора будут окрашены, в поле ***Expression*** настроек узла ***Color Expression***.

Распределение линий осуществляется с помощью узла ***Streamline***, для этого необходимо определить требуемую переменную каждой координаты. *Streamline positioning* позволяет задавать расположение линий в пространстве. Существует четыре способа описания этих линий: *On selected boundaries*, *Start point controlled*, *Uniform density* и *Magnitude controlled*. Способ ***On selected boundaries*** предполагает задание поверхности, через которую будут проходить линии. ***Start point controlled*** позволяет задавать набор точек, из которых будут выходить линии. Плотность линий в пространстве можно определить с помощью ***Uniform density***. В случае, если требуется задать максимальное и минималь-

ное расстояние между линиями, необходимо воспользоваться ***Magnitude controlled***. Узел ***Contour*** является похожим типом графика ***Isosurface***, только строит не поверхности, а замкнутые изоконтуры (линии тока). Окно настроек подобно тому, как описывалось для ***Isosurface***. С его помощью можно отобразить любую скалярную переменную на построенных изоповерхностях с помощью цветной шкалы ***Color Expression***.

Задача анализа иногда состоит в том, чтобы определить значение, а также положение максимального и минимального значения какой-либо переменной в пространстве, например температуры. Это удобно осуществить с помощью узла ***Max/Min Volume***, который позволяет на графике показать максимальное и минимальное значение, кроме того, положение этих точек в пространстве. Функция ***Max/Min Surface*** доступна для двухмерного набора графиков.

10.5. Одномерные графики

Часто необходимо построить график значений какой-то переменной по длине пространства или в определенной точке в зависимости от времени или различных параметров. Эти операции можно осуществить, используя в одномерном наборе графиков ***1D Plot Group*** типы графиков ***Line Graph*** и ***Point Graph***. Узел ***Line Graph*** предназначен для отображения значения переменной вдоль выбранной длины согласно рассчитанному набору данных. Для этого в настройках, в окне *Data*, необходимо выбрать, из какого набора решений брать значения для построения. Если набор данных определен для кривой, например ***Cut Line 2D*** или ***Cut Line 3D***, график будет построен по этим значениям. Если же набор данных, определяемый в ***Data***, является массивом данных для более чем двух координат, в настройках будет доступно окно *Selection*, в котором необходимо определить прямую пространства, вдоль которой будет построена требуемая переменная. Задать переменную можно, как и в вышеописанных случаях, в окне настроек ***Expression***. Аналогично этому строится график значений переменных в точке с помощью узла ***Point Graph***. Набор результатов данных для точки должен быть определен, например, с помощью набора данных ***Cut point 2D***. Построение глобальных переменных осуществляется с помощью графика ***Global***. Одномерный график можно построить из данных таблиц, определенных

в узле ***Tables***, используя узел ***Table Graph***. Для этого в окне настроек, на вкладке ***Data***, необходимо выбрать таблицу, из которой будут браться данные для графика. В поле *x-axis data* можно выбрать, из какой колонки таблицы будут браться данные для оси абсцисс, а в поле *Plot columns* – для оси ординат.

10.6. Экспорт данных и графиков

Многие пользователи могут столкнуться с проблемой экспорта набора полученных данных в виде таблиц или рисунков. Данная процедура в Comsol Multiphysics реализована достаточно простым способом. Если необходимо экспортировать набор данных какого-то графика из модели, необходимо на данный график нажать правой клавишей мыши в дереве модели, а затем выбрать ***Add Plot Data to Export***. Эти действия позволят создать дочерний узел ***Plot*** в родительском узле ***Export***. В настройках узла ***Plot*** можно определить, какой график будет экспортироваться на вкладке *Plot* и из какой группы графиков в поле *Plot group*. По умолчанию эти опции будут выставлены на график в группу графиков, для которых была применена операция экспортирования (***Add Plot Data to Export***). На вкладке ***Output*** можно выбрать формат в поле *File type* и путь сохранения ***Filename***. Во вкладке ***Advanced*** можно исключить добавление заголовков в сохраняемый файл, убрав галочку напротив опции *Include header*, а также тип записи по точности в опции ***Full precision***.

Экспорт рисунков осуществляется двумя способами. Первый способ: выбрать требуемый график для экспорта, в окне ***Graphics*** нажать на ***Image Snapshot***, тогда появится диалоговое окно, в котором, задав требуемые параметры качества картинки и путь сохранения, можно получить требуемый рисунок графика. Второй способ: добавить узел ***Image*** в родительском узле ***Export*** и затем в настройках, в окне ***Scene***, выбрать нужный тип графика. На вкладке ***Image*** настроек этого узла и ***Layout*** настраивается размер и качество экспортируемого рисунка. Вкладка ***File*** определяет формат и путь сохранения экспортируемого рисунка.

Раздел Б

Лабораторная работа 1. Падение плоской электромагнитной волны (ПЭМВ) в проводящей среде

Цель – изучить с помощью численного эксперимента явление распространения плоской электромагнитной волны в проводящем слое.

Задача – создать математическую модель с помощью программы Com- sol Multiphysics и смоделировать процесс распространения ПЭМВ.

Программа исследований следующая.

1. Рассчитать магнитное поле пластины шириной d и высотой $h1$ для односторонней (рис. 1, *а*), двухсторонней симметричной (рис. 1, *б*) и двухсторонней антисимметричной (рис. 1, *в*) плоской электромагнитной волны. Значение основных параметров, требуемых для расчета, приведены в табл. 1 для каждого варианта.

   Примечание: источником магнитного поля является его напряженность на границах **1** и **3**, в соответствии с типом ПЭМВ. Считая, что проводящая пластина бесконечной высоты, на границах **2** и **4** определить граничное условие $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$.

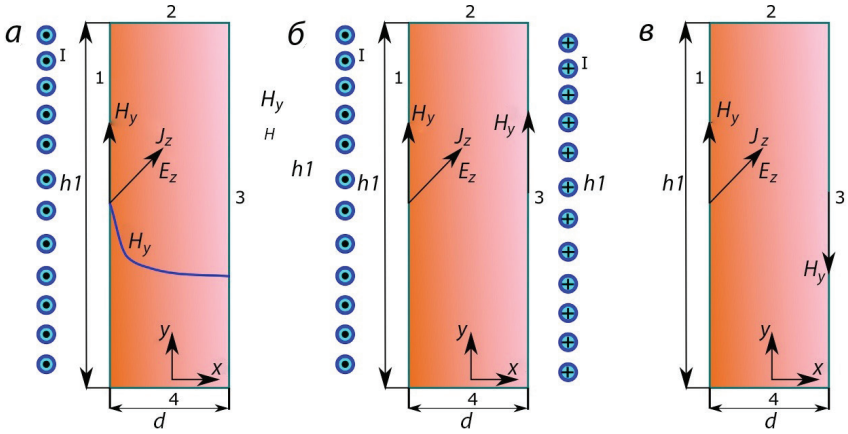


Рис. 1. Электропроводящая стенка с односторонним (*а*), двухсторонним симметричным (*б*), двухсторонним антисимметричным (*в*) падением плоской электромагнитной волны

Таблица 1

Основные данные для расчета

Вариант	Материал слоя	Электропроводность, МСм	Относительная магнитная проницаемость	*d*, мм	*h1*, мм
1	Титан	6.2	1	30	20
2	Нержавеющая сталь	2	1	30	20
3	Электротехнологическая сталь	4	3000	3	30
5	Никель	43 596	16–640	10	10
6	Алюминий	34–38	1	30	100
7	Медь	42–60	1	30	20

Примечание. Толщина стенки выбирается самостоятельно на основе коэффициента учета ограниченной толщины пластины для активной и реактивной мощностей

2. Для каждого варианта построить в одних осях зависимости напряженности магнитного поля $H_y(x)$, напряженности электрического поля $E_z(x)$ и плотности тока $J_z(x)$ и сравнить их. На основе этих графиков сделать вывод о затухании электромагнитной волны в проводящей среде.

3. Сравнить полученные значения поля со значениями, рассчитанными с помощью аналитических выражений [33]:

   - для одностороннего падения ПЭМВ

$$\underline{H}(x) = H_m \frac{sh\left(\underline{\Gamma}\,(d-x)\right)}{sh\left(\underline{\Gamma}\cdot d\right)};$$
$$\underline{J}(x) = -\underline{\Gamma} H_m \frac{ch\left(\underline{\Gamma}\,(d-x)\right)}{ch\left(\underline{\Gamma}\cdot d\right)};$$
$$E(x) = \frac{\underline{J}(x)}{\sigma};$$

- для двухстороннего падения ПЭМВ

$$\underline{H}(x) = H_m \frac{h\left(\underline{\Gamma}\,(d/2-x)\right)}{ch\left(\underline{\Gamma}\cdot d/2\right)};$$
$$\underline{J}(x) = -\underline{\Gamma} H_m \frac{sh\left(\underline{\Gamma}\,(d/2-x)\right)}{ch\left(\underline{\Gamma}\cdot d/2\right)};$$
$$E(x) = \frac{\underline{J}(x)}{\sigma};$$

- для двухстороннего антисимметричного падения ПЭМВ

$$\underline{H}(x) = H_m \frac{sh\left(\underline{\Gamma}\,(d/2-x)\right)}{sh\left(\underline{\Gamma}\cdot d/2\right)};$$
$$\underline{J}(x) = -\underline{\Gamma} H_m \frac{ch\left(\underline{\Gamma}\,(d/2-x)\right)}{sh\left(\underline{\Gamma}\cdot d/2\right)};$$
$$E(x) = \frac{\underline{J}(x)}{\sigma},$$

где $\underline{H}(x), E(x)$ – распределение напряженности магнитного, электрического полей; $\underline{J}(x)$ – плотности тока; $\underline{\Gamma}$ – комплексное значение коэффициента затухания электромагнитного поля; d – толщина стенки; σ – электропроводность.

Расчет результатов произвести для произвольного значения k_d относительной толщины стенки с условием, что глубина проникновения ПЭМВ будет $\delta = d/k_d$, тогда частоту можно определить как $f = \left(\mu_r \mu_0 \sigma \delta^2 \pi\right)^{-1}$.

4. Рассчитать влияние частоты электромагнитной волны на энергетические параметры, полученные на основе уравнения вектора Пойн-

тинга,

$$\underline{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\right) = p + jq = -\frac{1}{2}\underline{E}_z \cdot \underline{H}^*{}_y,$$

где $\underline{\mathbf{\Pi}}$ – комплексный поток Пойтинга; $\underline{\mathbf{E}}$ – комплексный вектор напряженности электрического поля; $\underline{\mathbf{H}}^*$ – сопряженный комплексный вектор напряженности магнитного поля; p, q – потоки активной и реактивной мощности, проходящие через поверхность; $\underline{E}_z$ и $\underline{H}^*{}_y$ – это z- и y-компоненты комплексного вектора напряженности электрического поля и сопряженного комплексного вектора напряженности магнитного поля.

Для того чтобы получить интегральные величины активной P и реактивной Q мощностей, необходимо проинтегрировать этот поток по поверхностям S_1 и S_3 (см. рис. 1) и взять разность проинтегрированных потоков, тогда получим следующее выражение:

$$\underline{S} = \int\limits_{S_1} \underline{\mathbf{\Pi}} dS - \int\limits_{S_3} \underline{\mathbf{\Pi}} dS = P - jQ.$$

Поскольку задача двухмерная и значения по ширине стенки b постоянны, последнее выражение можно записать относительно интегралов по высоте l для каждой стенки

$$\underline{S} = \left(\int\limits_{l_1} \underline{\mathbf{\Pi}} dl - \int\limits_{l_3} \underline{\mathbf{\Pi}} dl\right) b = P - jQ.$$

5. Используя вышеприведенные математические выкладки, рассчитать и построить графики для каждого типа ПЭМВ на различных частотах (относительной толщины стенки):

   - активную мощность;
   - реактивную мощность;
   - коэффициент мощности;
   - модуль полной мощности;

- коэффициент учета ограниченной толщины пластины для активной мощности
$$\chi = \frac{2P\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{2\pi f\mu}{H_m}^2};$$
- коэффициент учета ограниченной толщины пластины для активной мощности
$$\zeta = \frac{2Q\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{2\pi f\mu}{H_m}^2}.$$

Создать модель (добавить физический интерфейс), в которой источником магнитного поля будет не напряженность магнитного поля на границах 1 и 3 (см. рис. 1), а ток в проводящей стенке. Построить зависимости напряженности магнитного поля $H_y(x)$, напряженности электрического поля $E_z(x)$ и плотности тока $J_z(x)$ и сравнить их с кривыми для случая двухстороннего антисимметричного падения ПЭМВ. Подобрать значение тока, чтобы характеристики напряженности магнитного поля $H_y(x)$, напряженности электрического поля $E_z(x)$ и плотности тока $J_z(x)$ были близки к случаю с антисимметричным падением ПЭМВ.

6. Определить эквивалентный ток для случая двухстороннего антисимметричного падения ПЭМВ по формуле
$$I = \int\limits_S J_z dS,$$
где J_z – z-компонента вектора плотности тока.

   Подставить полученное значение тока в модель с источником тока и сравнить $H_y(x)$, $E_z(x)$ и $J_z(x)$.

7. Провести аналогии каждого рассмотренного случая падения ПЭМВ с реальными электротехнологическими установками. Сделать выводы:
   - об эффективности работы данных установок в различных режимах работы;
   - о физической интерпретации эквивалентного тока;

- возможности оптимального использования этих устройств.

Создание модели включает в себя следующие этапы.

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Frequency Domain***.

2. В глобальном узле дерева ***Global Definitions*** добавляем блок ***Parameters*** и заполняем его, как показано на рис. 2 с учетом заданных значений для вашего варианта (см. табл. 1).

Parameters

Name	Expression	Value	Description
d	32[mm]	0.032 m	Толщина стен
h1	100[mm]	0.1 m	Высота стенки
omega	2*pi*f1	2266.1 1/s	Угловая часто
sigma	5e6[S/m]	5E6 S/m	Электропрово
Hm	1.32e5[A/m]	1.32E5 A/m	Напряженост
deep	d/kd	0.011852 m	глубина прон
kd	2.7	2.7	Относительна
f1	1/(sigma*mu*d...	360.66 1/s	Частота магни
mu	mu0_const*mu_r	1.2566E-6 H/m	Абсолютная м
mu_r	1	1	Относительна
epselon_r	1	1	Отнительная д
B	10[mm]	0.01 m	Ширана стенк
gamma	(1+j)*1/deep	(84.375+84.37...	Коэффициент
I_coil	-26400[A]	-26400 A	Ток катушки
epselo_r	1	1	Относительна

Рис. 2. Параметры модели

3. Переходим к настройкам глобального узла *Component*. Начинаем с построения ***Geometry***. Для этого необходимо добавить *Rectangle* в узле ***Geometry*** и ввести значения ширины и высоты как параметров d и $h1$.

4. Дальше необходимо определить свойства среды. Для этого в узле ***Materials*** добавляем ***Blank Material***, выбираем, что этот узел определен для нашей геометрии в окне ***Selection***. В настройках этого узла, на вкладке ***Property***, вводим значения электропроводности, относительных магнитной и электрической проницаемостей, как параметры, определенные в п. 2.

5. Переходим к настройке физических интерфейсов. Для удобства дальнейшей работы определим название каждого интерфейса, как показано на рис. 3. Сделать это можно в окне настроек интерфейса, в поле ***Label***.

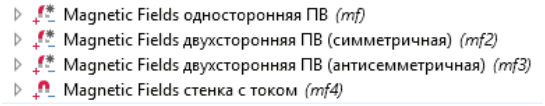


Рис. 3. Параметры модели

6. Настраиваем физический интерфейс для одностороннего падения ПЭМВ:

   - зададим ПЭМВ на границе 1 (см. рис. 1) с помощью граничного условия ***Magnetic Filed***. Для этого в настройках граничного условия определим, что значение напряженности магнитного поля для y компоненты равно **Hm**;
   - для того чтобы магнитное поле не затухало, на границах 2 и 4 (см. рис. 1) переопределим граничное условие ***Magnetic Insulation*** на ***Perfect Magnetic Conductor***. Это граничное условие определяет то, что магнитное поле вдоль y-компоненты затухает в бесконечности.

7. Настраиваем физический интерфейс для двухстороннего симметричного падения ПЭМВ:

   - зададим ПЭМВ на границе 1 и 3 (см. рис. 1) с помощью граничного условия ***Magnetic Filed***. Для этого в настройках граничного условия определим, что значение напряженности магнитного поля для y-компоненты равно **Hm**;
   - бесконечность на границах 2 и 4 зададим с помощью ***Perfect Magnetic Conductor***.

8. Настраиваем физический интерфейс для двухстороннего антисимметричного падения ПЭМВ:

   - зададим ПЭМВ на границе 1 и 3 (см. рис. 1) с помощью граничного условия ***Magnetic field***. Одно из граничных условий определим для стенки 1, а другое – для стенки 3. Зададим значение напряженности магнитного поля y-компоненты **Hm** для границы 1, а **-Hm** (отрицательное значение) для границы 3;

- бесконечность на границах 2 и 4 зададим с помощью ***Perfect Magnetic Conductor***.

9. Настраиваем физический интерфейс для проводящей стенки с током:

   - общий ток зададим с помощью узла ***Coil***. Выбираем тип катушки ***single conductor***, а значение тока прописываем в поле *Coil current* как параметр **I_coil**;
   - бесконечность на границах 2 и 4 зададим с помощью ***Perfect Magnetic Conductor***.

10. В ходе работы требуется рассчитать ряд переменных. Это можно осуществить в локальном узле ***Definitions*** с помощью инструментов ***Variables*** (рис. 4).

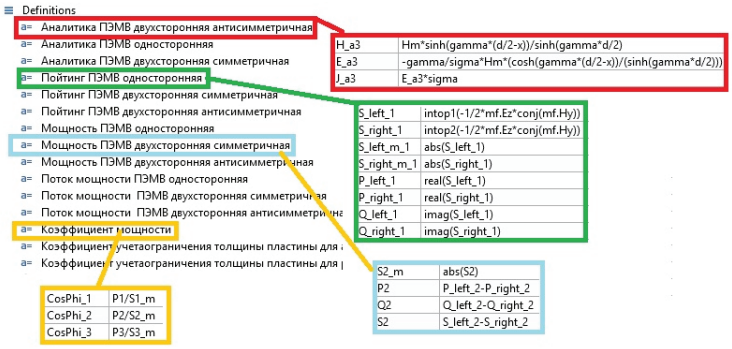


Рис. 4. Пример создания переменных

11. Последним шагом настройки модели перед ее запуском является описание типа исследования. На этапе создания модели одно исследование было уже добавлено (***Study 1: Frequency domain***). Сейчас необходимо добавить еще 3 таких же типа исследования. Для этого в ленте модели выбрать вкладку ***Study*** ⇒ ***Add Study*** ⇒ ***Frequency Domain***. Для упрощения работы с данной моделью назовем каждый тип исследования, как и физические интерфейсы в п. 5, так, как показано на рис. 5.

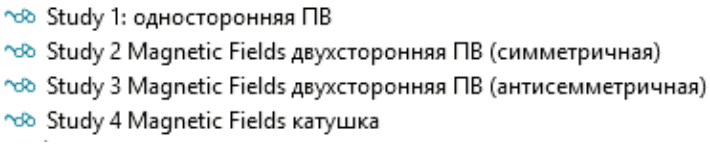


Рис. 5. Пример изменения названия исследований

12. Настройка шагов для данной задачи исследования подразумевает определение частоты в окне настроек узла ***Step 1: Frequency Domain***, в поле ***Frequencies***. Рекомендуется задавать указанное значение с помощью параметра **f1**, определенного в узле ***Parameters***. Кроме того, для каждого исследования необходимо определить физический интерфейс для решения. Делается это на вкладке ***Physics and Variables Selection*** узла настроек шага решателя при помощью добавления или устранения галочки напротив физического интерфейса. Выберем по одному интерфейсу для каждого исследования, чтобы название физического интерфейса соответствовало названию исследования (рис. 6).

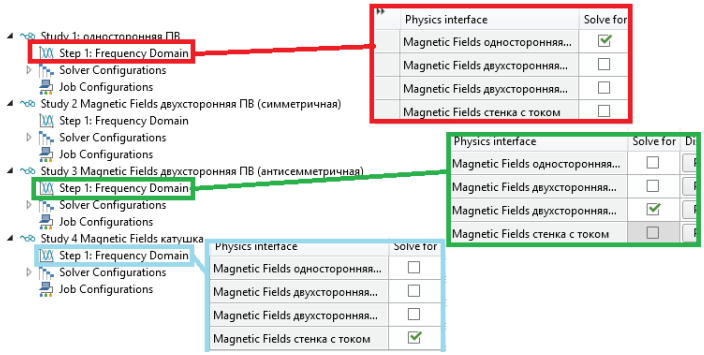


Рис. 6. Пример определения физических интерфейсов для решения в соответствии с исследованием

13. Запускаем расчет модели, для этого в настройках исследования (***Study***) нажимаем кнопку ***Compute***. Стоит отметить, что в данной задаче не настраивалась сетка. Возможно, для ряда режимов

придется сетку измельчать, чтобы получить более точные результаты.

14. Последним шагом создания модели является обработка результатов. Обработка результатов слишком многофункциональна, поэтому остается на усмотрение выполняющего работу. Однако приведем простой пример, как показать на графике изменение электромагнитных волн по ширине стенки.

В узле ***Data Sets*** создаем ***Cut Line 2D***. Определяем, из какого решения исследования этот инструмент будет брать данные. Для этого в настройках данного узла, во вкладке ***Data Set***, выбираем нужное решение. Необходимо описать кривую в пространстве с помощью четырех точек, например $(0, d)$ и $(h1/2, h1/2)$. Затем создаем ***1D Plot Group*** и в нем – ***Line Graph***. В настройках ***Line Graph***, во вкладке ***Data Set***, выбираем требуемый набор данных, ранее определенный ***Cut Line 2D***, а в поле *Expression* прописываем нужную переменную, например **mf.Hy** или **H_a1**, тогда будет построено распределение выбранной переменной по длине описанной кривой.

Лабораторная работа 2.
Разряд конденсатора на электромагнит

Цель – изучить с помощью численного эксперимента явления, протекающие в электромагнитах, подключенных к конденсатору.

Задача – создать математическую модель электромагнита с источником возбуждения магнитного поля, подключенным к внешней цепи.

Описание лабораторной работы

Электромагнит подключается к заряженному конденсатору (рис. 7). Сердечник и якорь выполнены шихтованными из слаболегированной стали. Сечение стержня S, м^2, длина стержня l, м, воздушный зазор Δ, м, число витков w.

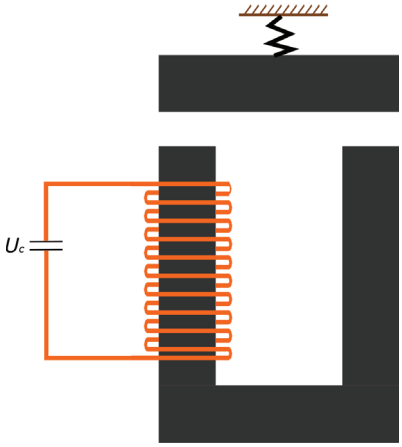


Рис. 7. Схематическое изображение исследуемого магнита

Основные уравнения, используемые в лабораторной работе:

$$u_c + L\frac{di}{dt} + Ri = 0;$$

$$i = C\frac{du_c}{dt};$$

$$F_{\text{эл}} + P + F_{\text{сопр}} + F_{\text{пр}} = m\frac{dV}{dt} = F_{\text{дин}}; \qquad (1)$$

$$V = \frac{dy}{dt};$$

где u_c – напряжение на конденсаторе; L – индуктивность катушки; R – активное сопротивление катушки; i – ток, протекающий в катушке; C – емкость конденсатора; $F_{\text{эл}}$ – электромагнитное усилие; P – проекция силы веса якоря; $F_{\text{сопр}}$ – сопротивление пружины; $F_{\text{пр}}$ – сила упругости пружины; m – масса якоря; $F_{\text{дин}}$ – динамическое усилие системы; V – скорость перемещения якоря; y – значение координаты якоря.

Распишем уравнение (1) с учетом направления действия усилий.

$$F_{\text{эл}} - mg - rV - k_{\text{пр}}(y - y_0) = m\frac{dV}{dt},$$

где g – ускорение свободного падения; r – коэффициент сопротивления пружины.

Значение основных параметров, требуемых для расчета, приведены в табл. 2 для каждого варианта.

Таблица 2

Основные данные для расчета

Параметр	Вариант						
	1	2	3	4	5	6	7
Площадь сечения стержня S, м^2	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063
Начальное значение зазора δ, м	0.005	0.006	0.003	0.008	0.005	0.005	0.004
Длина сердечника l_c, мм	160	180	140	120	130	160	180

Окончание табл. 2

Параметр	Вариант						
	1	2	3	4	5	6	7
Число витков w_k	123	100	150	180	200	100	150
Толщина стержня B_{st}, мм	30	40	35	20	25	20	40
Масса якоря m, кг	150	175	200	225	250	275	300
Коэф. жесткости пружины $k_{\text{пр}} \cdot 10^7$, Н/м	1.5	1.5	1.5	1.5	1	1	1
Напряжение заряда конденсатора $U_{c,\text{нач}}$, В	520	400	380	350	320	300	520
Емкость конденсатора C, мкФ	1600	1500	1400	1300	1600	1500	1400
Коэф. сопротивления пружины r, Н	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000

Программа исследований следующая:

1. Рассчитать индуктивности катушки в крайних положениях якоря с помощью формулы ниже и сравнить с расчетными значениями численной модели.
$$w^2\left(\frac{3\delta k_{\text{пр}}}{\mu_0 S}\right).$$

2. Оценить корректность допущения о постоянстве индуктивности L при движении якоря электромагнита.

3. Построить зависимости напряжения на емкости, тока катушки, скорости якоря, силы притяжения якоря от времени.

4. Повторить расчет при увеличенном напряжении заряда конденсатора. Пояснить результаты. Восстановить исходное значение напряжения.

5. Повторить расчет при увеличенной массе якоря. Пояснить результаты. Восстановить исходное значение массы.

6. Оценить влияние коэффициента упругости пружины на зависимость координаты от времени.

7. Оформить отчет о работе, отразив в нем все указанные выше пункты.

Создание модели включает в себя следующие этапы.

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields, Electrical Circuit, Moving Mesh*** ⇒ ***Time Dependent***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для данной задачи, например, как показано ниже (рис. 8).

Parameters

Name	Expression	Value	Description
Sst	0.0063[m^2]	0.0063 m²	Величина сечения магнитопровода
delt	0.005[m]	0.005 m	Величина начального зазора магнита
Lst	0.16[m]	0.16 m	Длина стержня магнитопровода
w	123	123	количество витков катушки
k	1.5E6[N/m]	1.5E6 N/m	коэффициент жесткости пружины
Uc	520[V]	520 V	Напряжение заряда конденсатора
C	1600E-6[F]	0.0016 F	Емкость конденсатора
Bst	0.03[m]	0.03 m	Ширина стержня
sigma_ir	120[S/m]	120 S/m	проводимость стали
mur	1200	1200	относительная магнитная проницаемость стали
m	150[kg]	150 kg	масса якоря
B	Sst/Bst	0.21 m	Толщина стержня
Sp	2*B*w/(6E7[S/m]*0.12[ohm])	7.175E-6 m²	Сечения проводника
y0	165[mm]	0.165 m	Начальное положение якоря
r	5E3[kg/s]	5000 kg/s	коэффициент сопротивления пружины

Рис. 8. Окно параметров

3. Добавим переменные, содержащие логические выражения, ***Definitions*** ⇒ ***Variables***. В узле ***Variables*** необходимо добавить следующие выражения (рис. 9).

Конструкция *if* состоит из следующих элементов: **«условие», «значение, если условие верно», «значение, если условие неверно»**. Добавленные переменные будут ограничивать движение якоря при соприкосновении со стержнями.

Variables

Name	Expression	Unit	Description
at_bottom	p<(y0-delt)		Отслеживание крайнего положения якоря
disp	if(at_bottom, -delt, (p-y0))	m	Ограничение перемещения якоря
vel	if(at_bottom && vv<0, 0, vv)	m/s	Ограничение скорости якоря

Рис. 9. Пример заполнения узла ***Variables***

4. По эскизу (рис. 10) построим расчетную область в узле ***Geometry*** согласно выбранному варианту лабораторной работы.

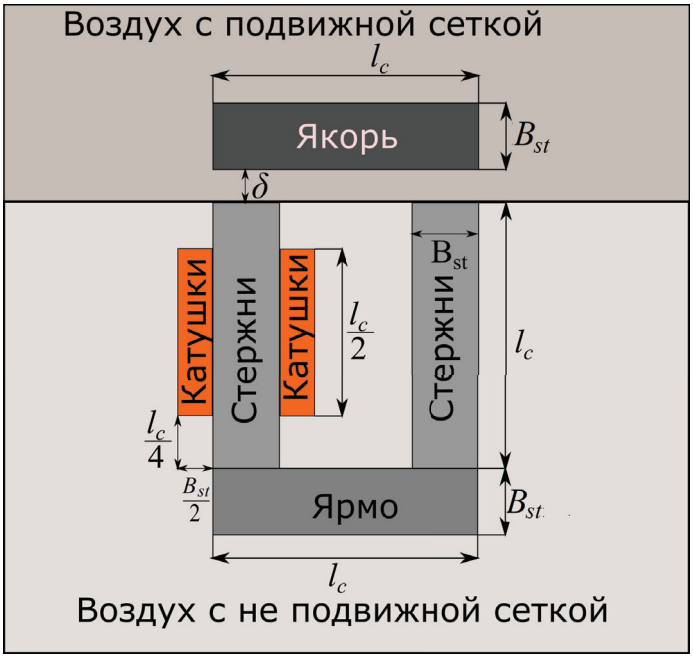


Рис. 10. Эскиз исследуемого устройства

5. Зададим свойства материалов ***Materials*** $\Rightarrow$ ***Blank Material***, выберем элементы магнитопровода, затем введем значение электрической проводимости стали (*Electrical conductivity*), значение относительной магнитной проницаемости (*Relative permeability*) и значение диэлектрической проницаемости (*Relative permittivity*), равное **1**. Остальным элементам геометрии задать требуемые свойства материалов равными 1.

6. Зададим толщину стержней магнита ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Settings*** ⇒ ***Thickness***, где в поле для ввода *Out-of-plane thickness* введем значение толщины стержня.

7. Зададим ток в проводнике, для этого создадим узел ***Coil*** в физике ***Magnetic Fields***. В опции ***Conductor model*** узла ***Coil*** должно быть выбрано ***Homogenized multi-turn***, в опции ***Coil excitation*** – ***Circuit(current)***, также должна быть выбрана опция ***Coil Group*** и одна область катушки с обратным направлением тока ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Coil*** ⇒ ***Reversed Current Direction***. Также в поле ***Number of turns*** нужно ввести количество витков катушки, а в опции ***Coil wire cross-section area*** выбрать ***User defined***, где в поле для ввода ввести значение сечения проводника.

8. Добавим узел расчета усилий по тензору Максвелла *Force Calculation* для якоря в физике ***Magnetic Fields*** .

9. Зададим дифференциальные уравнения, описывающие движение якоря: ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Global*** ⇒ ***Global Equations***. В данной задаче следует ввести выражения так, как показано на рис. 11.

а

Global Equations

$f(u,u_t,u_{tt},t)=0,\ u(t_0)=u_0,\ u_t(t_0)=u_{t0}$

Name	f(u,ut,utt,t) (m/s^2)	Initial value (	Initial value (	Description
vv	vvt-(mf.Forcey_0...	0	0	Расчёт скорости...
		0	0	

б

Global Equations

$f(u,u_t,u_{tt},t)=0,\ u(t_0)=u_0,\ u_t(t_0)=u_{t0}$

Name	f(u,ut,utt,t) (m/s)	Initial value (	Initial value (	Description
p	pt-vel	165[mm]	0	Расчёт положен...
		0	0	

Рис. 11. Пример записи дифференциальных уравнений (*а, б*)

10. Собрать внешнюю электрическую цепь в интерфейсе ***Electrical Circuit***, как показано на рис. 12. В настройках элемента ***Capacitor*** ввести значение емкости в поле *Capacitance* и напряжение заряда конденсатора в поле *Initial capacitor voltage* согласно выбранному варианту. Элемент цепи ***External I Vs. U*** необходимо связать с узлом *Coil* в интерфейсе ***Magnetic Fields***. Для этого в настройках узла, в опции ***Electrical potential***, нужно выбрать нужную катушку ***Coil Voltage (mf/coil1)***. Значение ***Resistor*** задать равным 10^{-6} Ом.

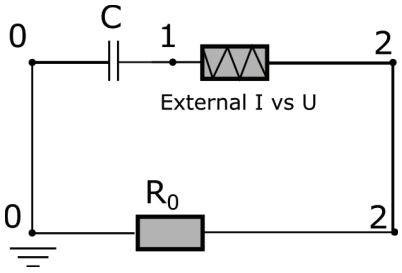


Рис. 12. Внешняя электрическая цепь

11. Настроим физику ***Moving Mesh***. По умолчанию вся расчетная область будет неподвижной, она определяется в узле ***Fixed Mesh***. С помощью узла ***Free Deformation*** зададим область, в которой сетка будет деформироваться произвольным образом, добавив узел в дерево модели. Определим область под названием «воздух с подвижной сеткой» (см. рис. 10) для этого узла. Опишем, по какому закону будет перемещаться сетка якоря, с помощью узла ***Prescribed Deformation***, добавив его в дерево модели. Определим этот узел для области якоря и в настройках на вкладке ***Prescribed mesh displacement***, в поле d_y, введем переменную **disp**.

12. В ***Study*** зададим временной период **range(0,0.005,2)**. Расчет модели запускается при указании: ***Study*** $\Rightarrow$ ***Compute***.

13. Построение величин, которые требуются по заданию, можно осуществить с помощью ***1D Plot Group*** $\Rightarrow$ ***Global***.

Лабораторная работа 3. Включение электромагнита на переменное напряжение

Цель – изучить с помощью численного эксперимента явления, протекающие в электромагнитах, подключенных к источнику переменного напряжения.

Задача – создать математическую модель электромагнита с источником возбуждения магнитного поля, подключенным к источнику переменного напряжения; исследовать переходные процессы в устройстве.

Описание лабораторной работы

Электромагнит подключается к источнику переменного напряжения (рис. 13). Сердечник и якорь выполнены шихтованными из слаболегированной стали. Сечение стержня S, м^2, длина стержня l, м, воздушный зазор Δ, м, число витков w.

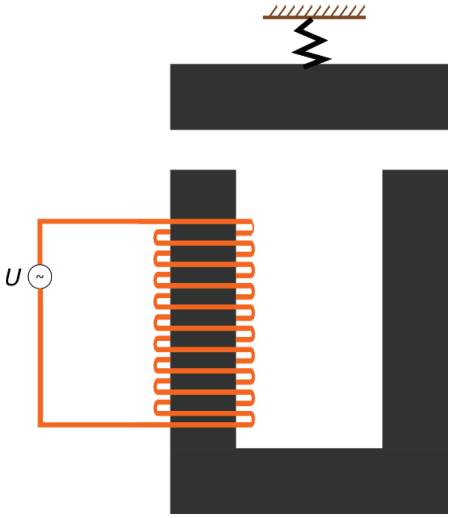


Рис. 13. Схематическое изображение исследуемого магнита

Основные уравнения, описывающие поведение данной системы:

$$F_{\text{эл}} + P + F_{\text{сопр}} + F_{\text{пр}} = m\frac{dV}{dt} = F_{\text{дин}}; \qquad (2)$$

$$V = \frac{dy}{dt},$$

где $F_{\text{эл}}$ – электромагнитное усилие; P - вес якоря; $F_{\text{сопр}}$ – сопротивление пружины; $F_{\text{пр}}$ – сила упругости пружины; m – масса якоря; $F_{\text{дин}}$ – динамическое усилие системы; V – скорость якоря; y – значение координаты якоря.

Распишем уравнение (2) с учетом направления действия усилий.

$$F_{\text{эл}} - mg - rV - k_{\text{пр}}(y - y_0) = m\frac{dV}{dt},$$

где m – масса якоря; g – ускорение свободного падения; r – коэффициент сопротивления пружины; $k_{\text{пр}}$ – коэффициент упругости пружины; y – значение положения пружины; y_0 – начальное положение якоря.

Значение основных параметров, требуемых для расчета, приведены в табл. 3 для каждого варианта.

Таблица 3

Основные данные для расчета

Параметр	Вариант						
	1	2	3	4	5	6	7
Площадь сечения стержня S, м^2	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063
Начальное значение зазора δ, м	0.005	0.006	0.003	0.008	0.005	0.005	0.004
Длина сердечника l_c, мм	160	180	140	120	130	160	180
Число витков w_k	123	100	150	180	200	100	150
Толщина стержня B_{st}, мм	30	40	35	20	25	20	40

Окончание табл. 3

Параметр	Вариант						
	1	2	3	4	5	6	7
Действующее напряжение сети U, В	520	400	380	350	320	300	520
Коэф. сопротивления пружины r, Н	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000

Программа исследований следующая:

1. Построить зависимости тока катушки, скорости якоря, силы притяжения якоря, динамического усилия от времени.
2. Повторить расчет при увеличенном напряжении. Пояснить результаты. Восстановить исходное значение напряжения.
3. Повторить расчет при увеличенной массе якоря. Пояснить результаты. Восстановить исходное значение массы.
4. Оценить влияние коэффициента упругости пружины на зависимость координаты от времени.
5. Оформить отчет о работе, отразив в нем все указанные выше пункты.

Создание модели включает в себя следующие этапы.

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields и Moving Mesh*** ⇒ ***Time Dependent***.
2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано на рис. 14.

Parameters

Name	Expression	Value	Description
Sst	0.0063[m^2]	0.0063 m²	Величина сечения магнитопровода
delt	0.005[m]	0.005 m	Величина начального зазора магнита
Lst	0.16[m]	0.16 m	Длина стержня магнитопровода
w	123	123	количество витков катушки
k	1.5E6[N/m]	1.5E6 N/m	коэффициент жесткости пружины
U	520[V]	520 V	Напряжение заряда конденсатора
f	50[Hz]	50 Hz	
Bst	0.03[m]	0.03 m	Ширина стержня
sigma_ir	120[S/m]	120 S/m	проводимость стали
mur	1200	1200	относительная магнитная проницаемость стали
m	150[kg]	150 kg	масса якоря
B	Sst/Bst	0.21 m	Толщина стержня
Sp	2*B*w/(6E7[S/m]*0.12[ohm])	7.175E-6 m²	Сечения проводника
y0	165[mm]	0.165 m	Начальное положение якоря
r	5E3[kg/s]	5000 kg/s	коэффициент сопротивления пружины

Рис. 14. Выражения для узла ***Variables***

Variables

Name	Expression	Unit	Description
at_bottom	p<(y0-delt)		Отслеживание крайнего положения якоря
disp	if(at_bottom, -delt, (p-y0))	m	Ограничение перемещения якоря
vel	if(at_bottom && vv<0, 0, vv)	m/s	Ограничение скорости якоря

Рис. 15. Данные для узла ***Parameters***

3. Добавим переменные, содержащие логические выражения ***Definitions*** ⇒ ***Variables***. В узле ***Variables*** необходимо добавить следующие выражения (рис. 15).

   Конструкция *if* состоит из следующих элементов **if: «условие», «значение, если условие верно», «значение, если условие не верно»**. Эти переменные будут ограничивать движение якоря при соприкосновении со стержнями.

4. Построим расчетную область в узле ***Geometry*** согласно выбранному варианту лабораторной работы по эскизу (рис. 16).

5. Зададим свойства материалов ***Materials*** ⇒ ***Blank Material***, выберем элементы магнитопровода, затем введем значение электрической проводимости стали (*Electrical conductivity*), значение относительной магнитной проницаемости (*Relative permeability*) и значение диэлектрической проницаемости (*Relative permittivity*), равное **1**. Остальным элементам геометрии задать требуемые свойства материалов равными 1.

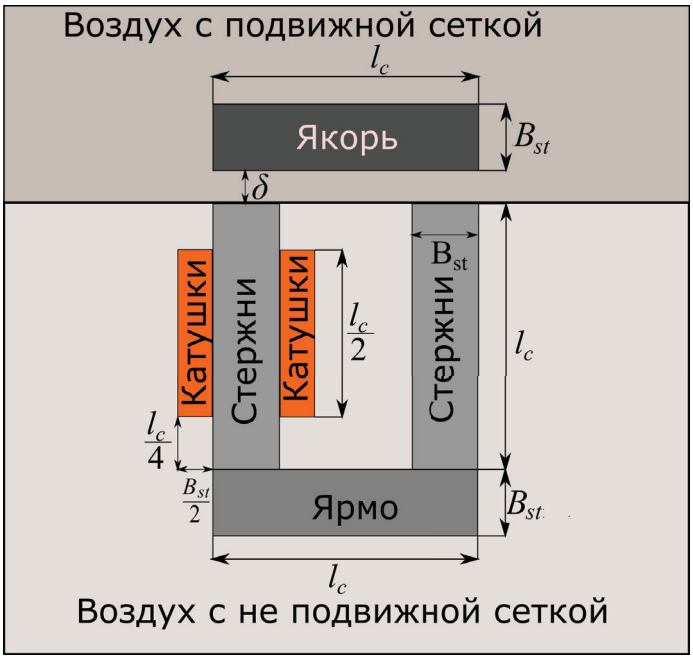


Рис. 16. Эскиз исследуемого устройства

6. Зададим толщину стержней магнита ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Settings*** ⇒ ***Thickness***, где в поле для ввода *Out-of-plane thickness* введем значение толщины стержня.

7. Зададим ток в проводнике в физике ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Coil***. В настройках узла ***Coil*** тип катушки ***Conductor mode*** должен быть ***Homogenized multi-turn***, вид возбуждения поля ***Coil excitation*** должен быть установлен ***Voltage***, а в поле для ввода *Coil Voltage* нужно вписать выражение **U*sin(2*pi* *50[Hz]*t)**. Должна быть выбрана опция ***Coil Group*** и одна область катушки с обратным направлением тока ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Coil*** ⇒ ***Reversed Current Direction***. В поле *Number of turns* нужно ввести количество витков катушки ***w***, а в опции ***Coil wire cross-section area*** выбрать ***User defined***, затем в поле для ввода a_{coil} ввести значение сечения проводника ***Sp***.

8. Добавим узел расчета усилий по тензору Максвелла ***Force Calcula-***

tion для якоря в физике ***Magnetic Fields***.

9. Зададим дифференциальные уравнения, описывающее движение якоря, ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Global*** ⇒ ***Global Equations***. Следует ввести выражения так, как показано на рис. 17.

а

Global Equations

$f(u,u_t,u_{tt},t)=0,\ u(t_0)=u_0,\ u_t(t_0)=u_{t0}$

Name	f(u,ut,utt,t) (m/s^2)	Initial value (	Initial value (	Description
vv	vvt-(mf.Forcey_0...	0	0	Расчёт скорости...
		0	0	

б

Global Equations

$f(u,u_t,u_{tt},t)=0,\ u(t_0)=u_0,\ u_t(t_0)=u_{t0}$

Name	f(u,ut,utt,t) (m/s)	Initial value (	Initial value (	Description
p	pt-vel	165[mm]	0	Расчёт положен...
		0	0	

Рис. 17. Дифференциальные уравнения (*а, б*) в ***Global Equation***

10. Настроим физику ***Moving Mesh***. По умолчанию вся расчетная область будет неподвижной и определяется в узле ***Fixed Mesh***. С помощью узла ***Free Deformation*** зададим область, в которой сетка будет деформироваться произвольным образом, добавив узел в дерево модели. Определим область под названием «воздух с подвижной сеткой» (см. рис. 16) для этого узла. Опишем, по какому закону будет перемещаться сетка якоря, с помощью узла ***Prescribed Deformation***, добавив его в дерево модели. Определим этот узел для области якоря и в настройках на вкладке ***Prescribed mesh displacement***, в поле d_y, введем переменную **disp**.

11. В ***Study*** зададим временной период **range(0,0.005,2)**. Расчет модели запускается при указании: ***Study*** ⇒ ***Compute***.

12. Построение величин, которые требуются по заданию, можно осуществить с помощью ***1D Plot Group*** ⇒ ***Global***.

Лабораторная работа 4. Расчет характеристик линейного асинхронного двигателя

Цель – исследовать с помощью численного эксперимента основные характеристики линейного асинхронного двигателя в установившихся режимах работы.

Задача – создать математическую модель, способную с приемлемой точностью рассчитывать основные характеристики линейного асинхронного двигателя.

Описание лабораторной работы

Дан линейный асинхронный двигатель (рис. 18) со следующими параметрами: H_i – высота сердечника индуктора; H_p – высота паза индуктора; H_{BI} – высота обратного магнитопровода; B_i – ширина индуктора; B_{SE} – ширина вторичного элемента; B_p – ширина паза; B_z – ширина зубца; Δ – величина воздушного зазора; Δ_{SE} – толщина вторичного элемента. Количество пазов $Q = 6_{BSE}$.

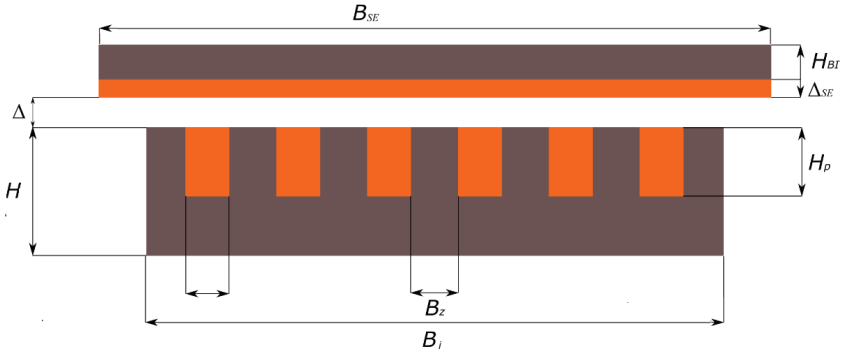


Рис. 18. Схематическое изображение исследуемого линейного асинхронного двигателя

Программа исследований следующая.

1. В работе требуется рассчитать:
   - полную мощность фаз (уравнение 3);
   - коэффициент мощности фаз двигателя (уравнение 4);
   - КПД двигателя (уравнение 5);
   - продольное и поперечное усилие разными способами (сила Лоренца, тензор Максвелла).
2. Нужно построить графики следующих величин в зависимости от скольжения:
   - продольного усилия;
   - поперечного усилия;
   - КПД двигателя;
   - полных мощностей фаз;
   - коэффициентов мощностей фаз.
3. Сравнить усилия (нормальные и тангенциальные), рассчитанные различными способами.
4. Перебирая параметры источника питания, получить максимальное КПД двигателя.

Расчет характеристик производится по следующим формулам:

$$S = 0.5(U \times \overline{I}); \tag{3}$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}(S)}{|S|}; \tag{4}$$

$$\eta = \frac{V F_{\text{т}}}{\mathrm{Re}(S_A + S_B + S_C)}, \tag{5}$$

где S – полная мощность фазы; U – фазовое напряжение; $\overline{I}$ – комплексно-сопряженное значение тока фазы; V – скорость вторичного элемента;

$F_т$ – тяговое усилие; S_A, S_B, S_C – полные мощности фаз A, B и C соответственно.

Значение основных параметров, требуемых для расчета, приведены в табл. 4 для каждого варианта.

Таблица 4

Основные данные для расчета

Параметр	Вариант						
	1	2	3	4	5	6	7
Количество пазов Q	6	12	18	6	12	18	6
Количество пазов на полюс и фазу q	1	1	1	1	2	2	1
Число витков в пазу U_p	136	136	204	68	204	136	204
Действующее значение тока в проводнике I, А	30	15	15	15	7.5	30	7.5
Проводимость вторичного элемента σ, См/м	6E7	6E7	3.7E7	3.7E7	6E7	6E7	3.7E7
Относительная магнитная проницаемость μ	1200	400	200	600	1200	600	400
Ширина индуктора **Bi**, мм	50	100	77	40	65	80	140
Отношение ширины вторичного элемента и ширины индуктора B_{SE}/B_i	1.15	1.20	1.25	1.3	1.15	1.3	1.25

Создание модели включает следующие шаги.

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields*** ⇒ ***Frequency Domain***.

2. В узле ***Parameters*** загрузим список параметров, требуемых для данной задачи: ***Parameters*** ⇒ ***Load from File*** ⇒ **Основные параметры.txt**, – или введем их, как показано на рис. 19.

Name	Expression
Q	12
Bz	11.5[mm]
Bp	20[mm]
Di	(Bz+Bp)*Q+Bz
Hi	58[mm]
Hp	40[mm]
Bi	77[mm]
Bse	90[mm]
Up	136
f	50[Hz]
omega	2*pi*f
I	sqrt(2)*15[A]
Ia	I*exp(0)
Ib	I*exp(-2*pi*j/3)
Ic	I*exp(2*pi*j/3)
delt	5[mm]
delt_se	5[mm]
sigma_Al	3.7E7[S/m]
sigma_Cu	6E7[S/m]
sigma_Ir	12[S/m]

Name	Expression
sigma_Ir	12[S/m]
mur	1200
q	1
m	3
tau	q*m*(Bp+Bz)
Vsinhr	2*tau*f
deltaecv	delt+delt_se
epselon0	(omega*mu0_const*delt_se*sigma_Cu*tau^2)/(pi^2*deltaecv)
sk	1
PP	sqrt(1+j*epselon0*sk)
QQ	PP*pi/tau
RR	pi*(Bse-Bi)/(2*tau)
SS	1/(1+PP*tanh(1/2*QQ*Bse)*tanh(RR))
TT	SS*tanh(1/2*QQ*Bse)/(0.5*QQ*Bse)
u	real(TT)
v	imag(TT)
kq	(1-u-sk*epselon0*v)/(1-sk*epselon0*v+sk^2*epselon0^2*u)
Vse	Vsinhr-Vsinhr*sk

Рис. 19. Список параметров в узле ***Parameters***

3. Построим параметризованную расчетную область с помощью узла ***Geometry*** со следующими настройками (рис. 20).

4. Создадим переменную, рассчитывающую интегральное усилие во вторичном элементе двигателя. Для этого добавим оператор интегрирования ***Definitions*** ⇒ ***Component Coupling*** ⇒ ***Integration***, определив область вторичного элемента для этого узла. Нужно также добавить саму переменную ***Definitions*** ⇒ ***Variables***, определяющую усилия по оси x и y с помощью выражений **intop1(mf.FLtzx)*Bi** и **intop1(mf.FLtzy)*Bi**.

5. Создадим переменную для расчета мощностей фаз ***Definitions*** ⇒ ***Variables***. Для этого в поле ***Expressions*** узла ***Variables*** введем

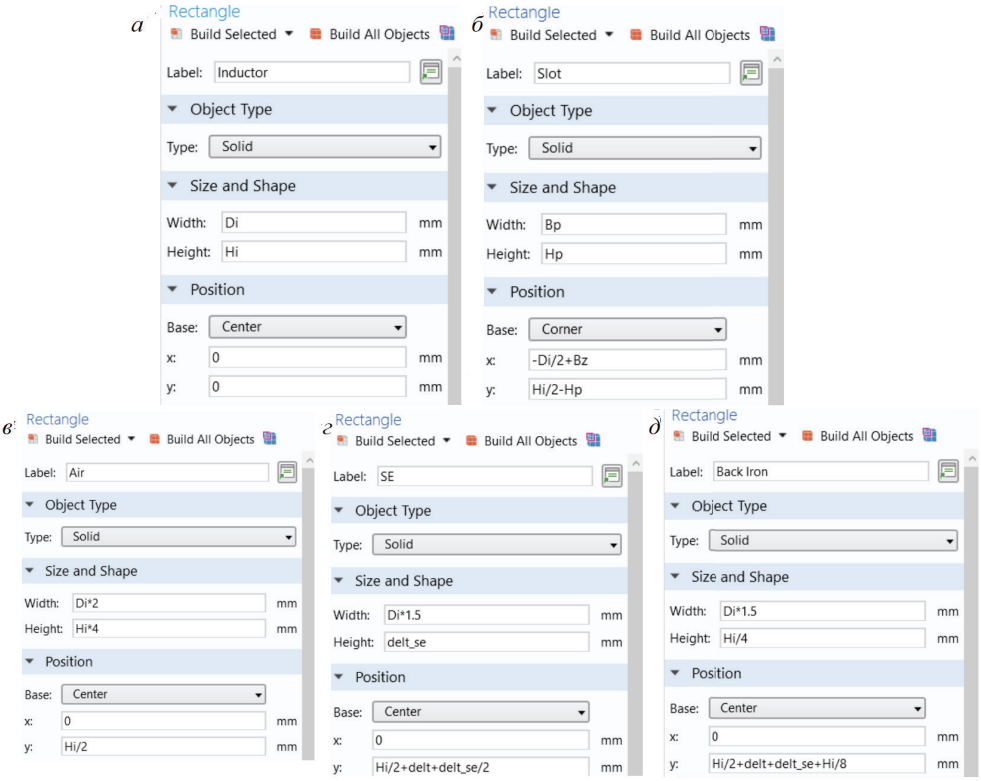


Рис. 20. Настройки узлов интерфейса ***Geometry***:
индуктора (*а*), паза (*б*), воздуха (*в*), вторичного элемента (*г*), обратного магнитопровода (*д*)

выражение **0.5*(mf.VCoil1*conj(mf.ICoil1))** и назовем ее **Sa**. Для расчета полных мощностей фазы B и C следует использовать название переменных **Sb** и **Sc**, а выражения для них записать как **0.5*(mf.VCoil2*conj(mf.ICoil2))** и **0.5*(mf.VCoil3*conj (mf.ICoil3))** соотвественно.

6. Зададим свойства материалов ***Materials*** $\Rightarrow$ ***Blank Material***, выберем элементы магнитопровода, затем введем значение электрической проводимости стали (*Electrical conductivity*), значение относительной магнитной проницаемости (*Relative permeability*) и значе-

ние диэлектрической проницаемости (*Relative permittivity*), равное **1**. В материале вторичного элемента электрическая проводимость должна быть домножена на коэффициент Болтона (**kq**). Остальным элементам геометрии задать требуемые свойства материалов равными 1.

7. Зададим ширину индуктора ***Magnetic Fields*** $\Rightarrow$ ***Settings*** $\Rightarrow$ ***Thickness***, где в поле для ввода *Out-of-plane thickness* введем значение ширины индуктора **Bi**.

8. Зададим катушки, генерирующие бегущее магнитное поле. Для создания бегущего поля необходима схема соединения обмоток «*AzBxCy*» (для двухполюсной машины). Чтобы создать катушку для фазы *A*, нужно выбрать первый и четвертый пазы в физике ***Magnetic Fields*** $\Rightarrow$ ***Coil***. В опции ***Conductor mode*** должно быть выбрано ***Homogenized multi-turn***, в ***Coil excitation*** должно быть выбрано ***Current***, также должна быть выбрана опция ***Coil Group***, а катушка в четвертом пазу выбрана с опцией обратного направления тока ***Magnetic Fields*** $\Rightarrow$ ***Coil*** $\Rightarrow$ ***Reversed Current Direction***. В поле ***Number of turns*** нужно ввести количество витков катушки, а в опции ***Coil wire cross-section area*** выбрать ***User defined***, где в поле для ввода ввести значение сечения проводника 1 мм^2. Остальные фазы должны быть заданы по такому же принципу.

9. Создадим узел ***Force Calculation*** в интерфейсе ***Magnetic Fields*** для расчета электромагнитных усилий по тензору Максвелла, определив его для области вторичного элемента, включая стальную его часть.

10. Зададим скорость перемещения вторичного элемента с помощью узла ***Velocity (Lorentz Term)*** в ***Magnetic Fields***. Этот узел нужно определить также для области вторичного элемента, включая стальную его часть.

11. В ***Study*** зададим перебор параметра скольжения ***Study*** $\Rightarrow$ ***Parametric Sweep*** $\Rightarrow$ ***add*** $\Rightarrow$ **sk**, где в поле *Parametr value list* нужно написать **range(0,0.1,1)**. В ***Frequency-Domain*** в поле

Frequencies ввести значения частоты. Расчет модели осуществляется по нажатию ***Study*** $\Rightarrow$ ***Compute***.

12. В ***Study*** зададим временной период **range(0,0.005,2)**. Расчет модели запускается, если указать ***Study*** $\Rightarrow$ ***Compute***.

13. Построение величин, которые требуются по заданию, можно осуществить с помощью ***1D Plot Group*** $\Rightarrow$ ***Global***.

14. Чтобы построить КПД двигателя в зависимости от скольжения, нужно на графике ***1D Plot Group*** $\Rightarrow$ ***Global***, в поле *Expression*, ввести выражение **(Fx*Vse)/(real(Sa)+real(Sb)+real(Sc))**.

15. Чтобы построить зависимость мощности фаз от скольжения, нужно на графике ***1D Plot Group*** $\Rightarrow$ ***Global***, в поле *Expression*, ввести **Sa, Sb, Sc** (которые мы определили ранее).

16. Чтобы построить зависимость коэффициента мощности фазы от скольжения, нужно на графике ***1D Plot Group*** $\Rightarrow$ ***Global***, в поле *Expression*, ввести **real(Sa)/abs(Sa)** (для фазы A). Для других фаз произвести аналогичный расчет коэффициентов мощности.

Лабораторная работа 5. Вакуумная печь сопротивления

Цель – исследовать явление лучистого теплообмена, протекающего в вакуумных печах сопротивления.

Задача – разработать численную модель для расчета тепловых характеристик вакуумной печи сопротивления.

Программа исследований

Модель вакуумной печи представлена на рис. 21. Размеры элементов модели даны в табл. 5. Каждый пакет состоит из четырех экранов тепловой изоляции, расположенных на расстоянии 5 мм друг от друга. Нагревательный элемент печи выполнен из вольфрама. Корпус печи выполнен из конструкционной стали. Материал экранов и мощность нагревателя заданы в табл. 6. Сравнить температуры элементов установки для одного и двух пакетов экранов.

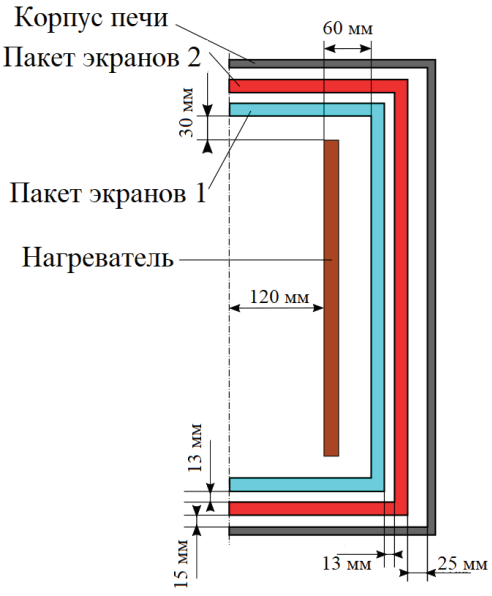


Рис. 21. Геометрия модели

Таблица 5

Размеры модели

Элементы печи	Толщина, мм	Высота, мм
Нагревательный элемент	2	400
Внутренний экран первого пакета	0.5	430
Внутренний экран второго пакета	0.5	500
Корпус	10	600

Таблица 6

Основные данные для расчета

Вариант	Материал	Мощность, кВт	Вариант	Материал	Мощность, кВт
1	Вольфрам	25	8	Титан	60
2	Тантал	30	9	Вольфрам	65
3	Молибден	35	10	Молибден	70
4	Тантал	40	11	Вольфрам	75
5	Вольфрам	45	12	Тантал	80
6	Молибден	50	13	Молибден	85
7	Тантал	55	14	Тантал	90

Создание модели состоит из этапов:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D Axisymmetric*** ⇒ ***Heat Transfer with Surface-to-Surface Radiation*** ⇒ ***Stationary***.

2. В узле ***Parameters*** вводим основные данные, требуемые для решения задачи, например, как показано на рис. 22.

Name	Expression	Value	Description
HeatSource	60[kW]	60000 W	
HeatFlux	2000[W/(m^2*K)]	2000 W/(m^2·K)	
r1	60[mm]	0.06 m	
dr1	6[mm]	0.006 m	
r2	120[mm]	0.12 m	
dr2	2[mm]	0.002 m	
r3	180[mm]	0.18 m	
dr3	0.5[mm]	5E-4 m	
z1	340[mm]	0.34 m	
z2	400[mm]	0.4 m	
dz3	60[mm]	0.06 m	
z3	z1+2*dz3	0.46 m	

Рис. 22. Основные данные узла ***Parameters***

3. В узле ***Definitions*** создадим два узла функций ***Interpolation***, в которых зададим зависимости излучательной способности от температуры. Первый узел соответствует нагревателю, второй – экранам. В таблицы записываем температуру и соответствующие значения излучательной способности из табл. 7. В параметре ***Arguments*** необходимо записать ***degC***.

Таблица 7

Излучательная способность материалов

Температура, °C	Вольфрам	Молибден	Тантал
20	0.05	0.03	0.04
1000	0.17	0.12	0.14
1300	0.2	0.15	0.17
1600	0.25	0.18	0.21
1800	0.28	0.21	0.24
2000	0.3	0.22	0.26
2200	0.32	0.23	0.27
2400	0.33	0.24	0.28
2700	0.35	0.25	0.29

4. В узле ***Geometry*** создаем модель, используя прямоугольники (***Rectangle***). После создания одного экрана можно использовать

блок ***Copy***, который создаст аналогичные прямоугольники на заданном расстоянии от исходного. При задании корпуса вакуумной печи создадим прямоугольники, соответствующие внутренней и внешней области корпуса, после используем блок ***Difference***, в котором, в параметре ***Objects to add***, выберем больший прямоугольник, а в параметре ***Objects to subtract*** – меньший.

5. В настройке физического интерфейса ***Heat Transfer with Surface-to-Surface Radiation***, в блоке ***Solid***, необходимо создать три блока ***Diffuse Surface***. В первом выбираем все границы нагревателя, во втором – границы экранов, в третьем – внутренние границы корпуса. В каждом из них включаем пункт ***Include surface-to-surface radiation***. В пункте ***Surface Emissivity*** задаем для нагревателя величину **int1(T)**, для экранов – **int2(T)**, а для корпуса – 0.1. Далее создаем блок ***Heat Source***, в котором выбираем область нагревателя и для параметра *Heat rate* задаем величину P_0, равную **HeatSource**. Затем создаем блок ***Heat Flux***, в котором выбираем наружные стенки корпуса печи. В узле ***Heat Flux*** выбираем параметр ***Convective heat flux*** и задаем значение h, равное **HeatFlux**.

6. Добавим в узле ***Materials*** материалы ***Tungsten [solid, Ho et al], Structural steel*** (в зависимости от варианта) ***Molybdenum [solid,[100]]*** или ***Tantalum [solid]***. *Tungsten* расположен в библиотеке ***Material Library / Elements / Tungsten / Tungsten [solid]***, ***Structural steel*** – в ***Built-In***, ***Molybdenum*** – в ***Material Library / Elements / Molybdenum / Molybdenum [solid]***, ***Tantalum*** – в ***Material Library / Elements / Tantalum***.

7. В узле ***Mesh*** создаем несколько узлов ***Mapped*** (3 для одиночного пакета экранов или 5 для двойного). В каждом выбираем соответствующий нагревателю или экрану прямоугольник, который хотим разбить на элементы, и добавляем два блока ***Distribution***. В каждом из этих блоков выбираем попарно противоположные стороны выбранного прямоугольника и задаем параметр *Number of elements* равным 80, если выбраны большие стороны, или 2, если выбраны меньшие стороны. Для создания сетки для корпуса создаем ***Free Quad***, в который добавляем три блока ***Distribution*** и задаем па-

раметры *Number of elements*: в первом выбираем внутренние горизонтальные грани, параметр равен 50; во втором – внешние горизонтальные грани, параметр равен 52; в третьем – вертикальные грани, параметр равен 100.

8. Запускаем решение исследования, нажав кнопку ***Compute*** в блоке *Study*.

9. Получить значение температуры в элементе модели можно, добавив в узел ***Derived Values*** блок ***Surface Maximum***. В этом блоке выбираем область, для которой необходимо найти температуру, а в окне ***Expression*** необходимо записать **T**. После нажатия кнопки ***Evaluate*** рассчитанное значение появится в новой таблице.

10. После осуществления расчетов и получения температур для случаев с одним и двумя пакетами экранов, в настройке физического интерфейса ***Heat Transfer with Surface-to-Surface Radiation*** необходимо убрать пункт ***Surface-to-surface radiation*** и рассчитать модель.

Лабораторная работа 6. Сравнение динамических и статических характеристик линейной индукционной машины

Цель – исследовать установившиеся и переходные процессы, протекающие в линейной индукционной машине с помощью динамических и статических характеристик.

Задача – разработать численную модель для расчета переходных и установившихся процессов с учетом основных эффектов, протекающих в линейном двигателе.

Программа исследований включает в себя этапы.

1. Реализовать в модели предложенную конструкцию линейного асинхронного двигателя (рис. 23), обмотки (пазы для модели) которого соединены по схемам (рис. 24) с помощью модуля ***Electrical Circuit***. Основные данные для модели взять согласно варианту из табл. 8, рис. 24.

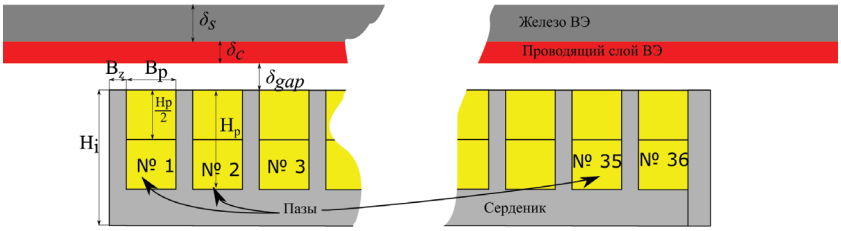


Рис. 23. Конструкция асинхронного двигателя

Таблица 8

Основные данные для расчета

Параметр	Вариант						
	1	2	3	4	5	6	7
Количество пазов Q	36	36	36	36	36	36	36
Ширина индуктора Bi, мм	500	450	600	350	375	550	525
Число витков в пазу U_p	12	12	12	12	12	12	12
Действующее значение напряжения источника U, В	660	380	220	400	550	780	500
Проводимость вторичного элемента σ, См/м	6E7	6E7	3.7E7	3.7E7	6E7	6E7	3.7E7
Относительная магнитная проницаемость стальных элементов μ	1200	400	200	600	1200	600	400
Отношение ширины вторичного элемента к ширине индуктора B_{SE}/B_i	1.15	1.20	1.25	1.3	1.15	1.3	1.25
Ширина зубца B_z, мм	10	10	10	10	10	10	10
Высота паза H_p, мм	46	46	46	46	46	46	46
Ширина паза B_p, мм	12	12	12	12	12	12	12

Окончание табл. 8

Параметр	Вариант						
	1	2	3	4	5	6	7
Толщина воздушного зазора δ_g, мм	10	15	8	5	7	13	4
Ширина проводящего слоя ВЭ δ_c, мм	10	5	8	12	15	4	12
Ширина стального слоя ВЭ δ_s, мм	50	50	50	50	50	50	50
Высота индуктора Hi, мм	108	108	108	108	108	108	108

2. Произвести расчет установившихся и переходных процессов двигателя при различном соединении обмоток индуктора (рис. 24).

3. Сравнить механические характеристики, полученные для разных режимов работы двигателя с разными соединениями обмоток индуктора (рис. 24).

4. Построить осциллограммы токов катушек фазы A, B, C.

5. Построить графики изменения скорости и усилия во времени.

Создание модели включает следующие шаги:

1. Открываем программу Comsol Multiphysics ⇒ ***Model Wizard*** ⇒ ***2D*** ⇒ ***Magnetic Fields*** и ***Electrical Circuit*** ⇒ ***Frequency-Domain***.

2. В узле ***Parameters*** загрузим список параметров, требуемых для данной задачи ***Parameters*** ⇒ ***Load from File*** ⇒ ***Основные параметры.txt***, или введем их вручную (рис. 25).

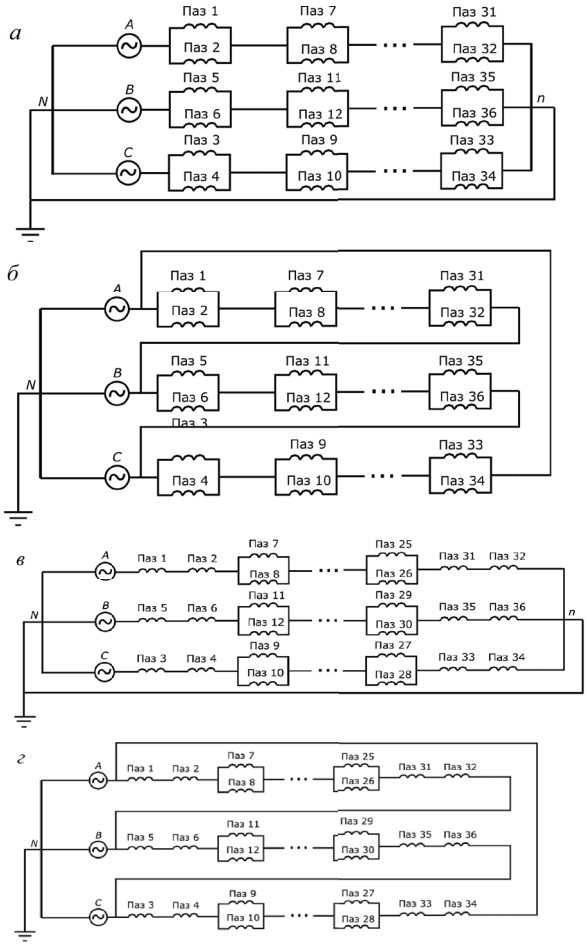


Рис. 24. Схемы соединения обмоток для различных вариантов

3. Загрузим уже готовую конечно-элементную сетку модели ***Mesh*** $\Rightarrow$ ***Import*** $\Rightarrow$ файл сетки, выданный преподавателем, или построим расчетную область (см. рис. 23) в узле ***Geometry***, используя данные выбранного варианта, и создадим сетку самостоятельно. Стоит добавить, что магнитное поле должно распространяться в окружающую среду, поэтому, помимо конструкции, изображенной на рис. 23, необходимо в модели нарисовать область воздуха вокруг двигателя.

Name	Expression	Value	Description
sk	1	1	Скольжение
gammaSE	5.7e7[S/m]	5.7E7 S/m	Электропроводность пр...
gamma1	4.6e6[S/m]	4.6E6 S/m	Электропроводность об...
Hi	108[mm]	0.108 m	Высота индуктора
Bi	0.5[m]	0.5 m	Ширина индуктора
Q	36	36	количество пазов в инд...
Bse	0.7[m]	0.7 m	Ширина ВЭ
deltaSE	3[mm]	0.003 m	Проводящий слой ВЭ
delta	12[mm]	0.012 m	Толщина воздушного з...
Up	12	12	Количество прсводник...
Kz	0.45	0.45	коэффициент заполнен...
f	50[Hz]	50 Hz	Частота сети
kq	(1-u-sk*epselon...	0.83803	Коэффициент Болтона
gamma_SE	kq*gammaSE	4.7768E7 S/m	Электропроводность ВЭ...
gamma_ir	10[S/m]	10 S/m	Электропроводность ст...
mur	1000	1000	
V	((1-sk)*Vsinhr)	0 m/s	Скорость ВЭ
q	2	2	число позов на фазу и п...
Bp1	12[mm]	0.012 m	

Name	Expression	Value	Description
m	3	3	число фаз
tau	q*m*(Bp1+Bz1)	0.132 m	полюсное деление
Vsinhr	2*tau*f	13.2 m/s	синхронная скорость
epselon0	(omega*mu0_c...	6.6211	Электромагнитная добр...
omega	2*pi*f	314.16 Hz	угловая частота
deltaecv	18[mm]	0.018 m	эквивалентный не магн...
PP	sqrt(1+j*epselon...	1.9617+1.6876i	
QQ	PP*pi/tau	(46.687+40.16...	
RR	pi*(Bse-Bi)/(2*ta...	2.38	
SS	1/(1+PP*tanh(1/...	0.25852-0.146...	
TT	SS*tanh(1/2*QQ...	0.0046605-0.0...	
u	real(TT)	0.0046605	
v	imag(TT)	-0.012972	
Hp1	64[mm]	0.064 m	
Bz1	10[mm]	0.01 m	
Um	660*sqrt(2)[V]	933.38 V	
M	550[kg]	550 kg	
lob	0.54[m]	0.54 m	
Spr	1.4400E-5[m^2]	1.44E-5 m^2	
Rl	1e-6[ohm]	1E-6 Ω	

Рис. 25. Основные параметры модели

4. Добавим узел интегрирования для области вторичного элемента ***Definitions*** $\Rightarrow$ ***Component Couplings and Coupling Operators*** $\Rightarrow$ ***Integration***. Создадим переменную, отвечающую за расчет электромагнитных усилий по оси x во вторичном элементе ***Definitions*** $\Rightarrow$ ***Variables***. В поле *Name* узла ***Variables*** зададим имя данной переменной **F**,а само выражение $\mathbf{intop1(mf.FLtzx)} * \mathbf{Bi}$ переменной напишем в поле *Expression*.

5. Создадим узел интегрирования любой области паза для дальнейшего расчета тока в требуемых катушках ***Definitions*** $\Rightarrow$ ***Component Couplings and Coupling Operators*** $\Rightarrow$ ***Integration***.

6. Добавим в узле ***Materials*** узлы ***Blank Material*** и определим каждый из них для соответствующей области модели. Значение относительной магнитной и электрической проницаемости *Relative permeability* и *Relative permittivity* зададим равными единице для всех областей расчетной области, кроме магнитопровода и обратного железа ВЭ. Значение *Relative permeability* для области магнитопровода индуктора зададим равным 1000, для обратного железа ВЭ зададим согласно выбранному варианту работы. Значение *Relative permittivity* для этих областей также будет равно единице. Значение *Electrical conductivity* в узлах ***Blank Materials*** для областей воздуха и магнитопровода индуктора зададим равным 1, для проводящей области вторичного элемента значение электро-

проводности, заданное согласно варианту работы, умножим на коэффициент Болтона **kq**, а для магнитной области вторичного элемента – значение электропроводности стали $4.6 \cdot 10^6$ См/м, также умноженное на коэффициент **kq**. С помощью коэффициента учитывается поперечный краевой эффект; коэффициент вычисляется в узле ***Parameters***. Значение *Electrical conductivity* для областей обмотки зададим равным электропроводности меди ($5.6 \cdot 10^7$ См/м).

7. Зададим ширину индуктора **Bi** в поле для ввода *Out-of-plane thickness*, ***Magnetic Fields*** ⇒ окно настроек ⇒ вкладка ***Thickness***.

8. Создадим и настроим узлы ***Coil*** в физическом интерфейсе ***Magnetic Fields***, которые будут отвечать за моделирование бегущего магнитного поля. Для создания бегущего поля необходимо многофазное питание обмотки индуктора (в нашем случае трехфазная система). Данная модель двигателя обладает двухслойной обмоткой с полузаполненными крайними пазами. Количество пазов двигателя равно **Q**, а количество пазов на полюс и фазу равно 2, поэтому раскладка фаз по пазам будет «AAzzBBxxCCyyAAzzBBxxCCyyAAzzBBxxCCyy» (рис. 26).

   Узел *Coil*, моделирующий обмотки фазы A, можно представить, как на рис. 25. В окне настроек узла ***Coil*** опции ***Conductor mode*** нужно определить ***Homogenized multi-turn***, ***Coil excitation – Curcuit (current)***, ***Coil wire cross-section area – User defined***, также должна быть активирована опция ***Coil Group***. В полях ввода настроек узла ***Coil*** a_{coil} ввести **Spr**, *Number of turns* – **Up**, σ_{coil} – значение электропроводности меди. Для областей, в которых ток протекает в обратном направлении, например для узла катушки фазы A это пазы со значениями тока X, создадим подузел ***Reversed Current Direction*** и определим его для требуемых областей. Если имеется параллельное включение обмоток в одном узле ***Coil***, в нем нужно добавить подузел ***Domain Group*** и определить его для областей, которые должны быть подключены параллельно. Для этой задачи будет достаточно создать три узла *Coil* для фаз A, B, C.

9. Добавим учет скорости движения ВЭ в модели с помощью узла ***Velocity (Lorentz Term)*** в интерфейсе ***Magnetic Fields***. Выбе-

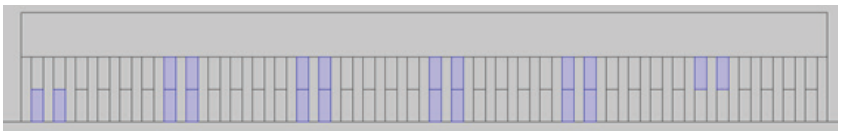
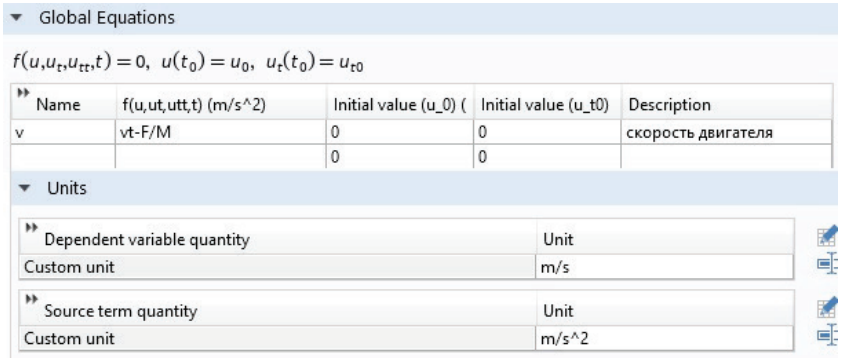


Рис. 26. Пример выбранных пазов для катушки в фазе A

рем область вторичного элемента и обратного магнитопровода, в поле для ввода *Velocity (x)* введем значение скорости вторичного элемента V.

10. Добавим расчет скорости вторичного элемента для типа исследования ***Time-Dependent***, используя дифференциальное уравнение привода (2-й закон Ньютона). Для этого добавим ***Magnetic Fields*** $\Rightarrow$ ***Global*** $\Rightarrow$ ***Global Equation***, которую необходимо настроить, как на рис. 27.



Global Equations

$f(u,u_t,u_{tt},t) = 0,\ u(t_0) = u_0,\ u_t(t_0) = u_{t0}$

Name	f(u,ut,utt,t) (m/s^2)	Initial value (u_0) (	Initial value (u_t0)	Description
v	vt-F/M	0	0	скорость двигателя
		0	0	

Units

Dependent variable quantity	Unit
Custom unit	m/s

Source term quantity	Unit
Custom unit	m/s^2

Рис. 27. Настройка ***Global Equations***

11. Далее продублируем блок скорости вторичного элемента, нажав правой кнопкой мыши на ***Velocity (Lorentz Term)*** $\Rightarrow$ ***Duplicate***. В поле для ввода *Velocity (x)* нужно ввести значение скорости вторичного элемента V, рассчитанное в узле ***Global Equations***.

12. Соберем требуемую схему соединения обмоток (см. рис. 24) в физическом интерфейсе ***Electrical Circuit***. При сборке электрической цепи необходимо использовать элементы ***External U Vs. I*** для

моделирования катушек двигателя, ***Voltage Source*** для источников напряжения, а также можно использовать ***Resistor*** для учета сопротивления лобовых частей, значение которого следует посчитать самостоятельно. Настройки элемента ***Voltage Source*** выберем в зависимости от типа предстоящего исследования модели, а именно – *Source type*. Если по заданию требуется проверить расчет в задаче с помощью гармонического исследования ***Frequency-Domain***, то в настройках узла ***Voltage Source*** необходимо установить ***AC-Source*** для ***Source type***, а в случае динамического исследования ***Time-Dependent*** установить ***Sine source*** для ***Source type***. Стоит помнить, что при расчете электрических цепей источник напряжения необходимо моделировать с помощью модели Тевенина, а именно: нужно обязательно к источнику напряжения подключить последовательно сопротивление (его можно задать очень маленьким или равным значению сопротивления лобовых частей обмотки).

13. Далее нужно добавить дополнительную физику для расчета переходного режима ***Study*** $\Rightarrow$ ***Add Study*** $\Rightarrow$ ***Time-Dependent***.

14. В узле ***Frequency-Domain*** создадим параметрическое исследование для того чтобы рассчитать модель при различных значениях параметра скольжения, с помощью следующих манипуляций: ***Study*** $\Rightarrow$ ***Parametric Sweep*** $\Rightarrow$ ***add*** $\Rightarrow$ **sk**, где в поле ***Parametr value list*** нужно написать **range (0,0.05,1)**. В ***Frequency-Domain***, в поле *Frequencies*, введем значение частоты. Далее выберем опцию ***Modify model configuration for study step*** и исключим из расчета узлы модели, использующие переменную времени (*Global Equations*, *Velocity (Lorentz Term)* с переменной *V*. Источники напряжения ***Voltage Source*** в интерфейсе ***Electrical Circuit*** должны быть с настройками опции ***Source type*** как ***AC-source***. Запускаем расчет, нажав ***Study*** $\Rightarrow$ ***Compute***. Это исследование будет рассчитывать установившиеся характеристики двигателя.

15. Для ***Time-Dependent***, в поле *Times* введем **range (0,0.001,2)**. Далее выберем опцию ***Modify model configuration for study step*** и исключим из расчета элементы, использующиеся для квазистационарного расчета – *Velocity (Lorentz Term)* с переменной ***V***. Ис-

точники напряжения ***Voltage Source*** в интерфейсе ***Electrical Circuit*** должны быть с настройками опции ***Source type***, как *Sine source*. Это исследование предназначено для расчета динамических (переходных) характеристик двигателя.

16. Построение величин, которые требуются по заданию, можно осуществить с помощью ***Results*** $\Rightarrow$ ***1D Plot Group*** $\Rightarrow$ ***Global***.

17. Чтобы построить осциллограммы токов, нужно в графике ***Results*** $\Rightarrow$ ***1D Plot Group*** $\Rightarrow$ ***Global***, в поле *Expression*, ввести **intop(mf.Jz)/(Up)**. Оператор **intop** – это название оператора интегрирования (*Operator name*), который был определен для области паза.

18. Чтобы построить механическую характеристику для переходного режима, нужно в графике ***Results*** $\Rightarrow$ ***1D Plot Group*** $\Rightarrow$ ***Global***, в поле *Expression*, ввести переменную рассчитанного усилия, а во вкладке ***x-Axis Data*** опции ***Parameter*** выбрать ***Expression***, где в поле для ввода ввести формулу для скольжения **(Vsinhr-v)/Vsinhr**.

Приложение (справочное)

Логические и алгебраические операции

Оператор	Описание
+	Плюс
-	Минус
*	Умножение
/	Деление
^	Возведение в тепень
==	Равенство
!=	Не равно
>	Больше
>=	Больше или равно
<	Меньше
<=	Меньше или равно
&&	Логическое «И»
||	Логическое «ИЛИ»
!	Логическое «НЕ»

Математические и физические постоянные

Название	Описание	Значение
eps	Относительная точность вычисления чисел в Comsol	2^{52}
i, j	Мнимое число	$\sqrt{-1}$
Inf, inf	Число большее, чем может определить Comsol	∞
Nan, nan	Неопределенность	Inf/Inf или 0/0
pi	Постоянное число пи	3.14
g_const	Ускорение свободного падения	9.8 м/с^2
N_A_-const	Постоянное число Авогадро	$6.022 \cdot 10^{23}$ 1/моль
Z0_const	Волновое сопротивление вакуума	$376.73 = m0 \cdot c$
mu0_const	Магнитная проницаемость вакуума	$4 \cdot pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
c_const	Постоянная скорость света	299 792 458 м/с
sigma_-const	Постоянная Стефана-Больцмана	$5.6 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4)

Математические функции

Название	Описание функции	Синтаксис
abs	Абсолютное значение	abs(x)
acos	Арккосинус	acos(x)
acosh	Арккосинус гиперболический	acosh(x)
acot	Арккотангенс	acot(x)
acoth	Арккотангенс гиперболический	acoth(x)
acsc	Арккосеканс	acsc(x)

Название	Описание функции	Синтаксис
acsch	Арккосеканс гиперболический	acsch(x)
arg	Аргумент (в радианах)	arg(x)
asec	Арксеканс	asec(x)
asech	Арксеканс гиперболический	asech(x)
asin	Арксинус	asin(x)
asinh	Арксинус гиперболический	asinh(x)
atan	Арктангенс	atan(x)
atan2	Четырехквадратный арктангенс	atan2(y, x)
atanh	Арктангенс гиперболический	atanh(x)
besselj	Функция Бесселя первого рода	besselj(a, x)
bessely	Функция Бесселя второго рода	bessely(a, x)
besseli	Измененная функция Бесселя первого рода	besseli(a, x)
besselk	Измененная функция Бесселя второго рода	besselk(a, x)
ceil	Ближайшее целое число	ceil(x)
conj	Комплексное сопряженное	conj(x)
cos	Косинус	cos(x)
cosh	Гиперболический косинус	cosh(x)
cot	Котангенс	cot(x)
coth	Гиперболический котангенс	coth(x)
csc	Косеканс	csc(x)
csch	Гиперболический косеканс	csch(x)
erf	Ошибка функции	erf(x)
erfinv	Инверсная ошибка функции	erfinv(x)
exp	Экспонента	exp(x)
floor	Ближайшее предыдущее число	floor(x)
gamma	Гамма-функция	gamma(x)
imag	Мнимая часть	imag(u)
log	Натуральный логарифм	log(x)

Название	Описание функции	Синтаксис
log10	Десятичный логарифм	log10(x)
log2	Логарифм по основанию 2	log2(x)
max	Максимальное из двух аргументов	max(a, b)
min	Минимальное из двух аргументов	min(a, b)
mod	Модульный оператор	mod(a, b)
psi	Функция пси и ее производная	psi(x, k)
random	Случайная функция с равномерным распределением	random(x, y)
randomnormal	Случайная функция с распределением Гаусса	randomnormal(x, y)
range	Создать ряд чисел	range(a,step,b)
real	Реальная часть	real(u)
round	Округление до ближайшего целого	round(x)
sec	Секанс	sec(x)
sech	Гиперболический секанс	sech(x)
sign	Сигнум-функция	sign(u)
sin	Синус	sin(x)
sinh	Гиперболический синус	sinh(x)
sqrt	Корень квадратный	sqrt(x)
tan	Тангенс	tan(x)
tanh	Гиперболический тангенс	tanh(x)

Если известна некая переменная A для двухмерной модели, то будут доступны следующие переменные в этой модели $A, Ax, Ay, Axx, Axy, Ayx, Ayy, At, Axt, Ayt, Axxt, Axyt, Ayxt, Ayyt, Att, Axtt, Aytt, Axxtt, Axytt, Ayxtt, Ayytt$. В этом случае, например, Ax будет соответствовать производной переменной A по координате x, а например, Att – производной по времени второго порядка.

Переменные

Название	Описание	Тип
freq	Частота	Глобальная переменная
h	Размер элемента сетки (длина самой длинной грани элемента)	Полевая переменная
nx, ny, nz	Нормали для границ	Полевая переменная
tx, ty, tz	Касательные вектора	Полевая переменная
phase	Фазовый угол	Глобальная переменная
t	Время	Глобальная переменная
x, y, z	Пространственные декартовы координаты	Полевая переменная
r, phi, z	Пространственные цилиндрические координаты	Полевая переменная

Встроенные операторы:

- d (выражение, переменная) – оператор производной выражения относительно заданной переменной. Отличие от Ax заключается в том, что Ax – это встроенная переменная производной;
- pd (выражение, переменная) – оператор собственной производной;
- $integrate$ (выражение, переменная, нижний предел, верхний предел) – оператор поиска определенного интеграла;
- $dest$ (место оценки) – оператор, позволяющий оценить интегральное значение в какой-либо выбранной точке;
- if (условие, выражение 1, выражение 2) – оператор условия. Если условие верно, то действует выражение 1, иначе – выражение 2;
- NIF (условие 1, выражение 1, условие 2, выражение 2, условие n, выражение n, выражение $(n+1)$) – аналог оператора if с большим количеством логических выражений;

- $nojac$ – оператор, позволяющий любое выражение исключить из расчета якобиана системы;

- $realdot(a, b)$ – производит скалярное умножение комплексного вектора a и сопряженного комплексного вектора b, выводя только реальную часть этой операции;

- sum (выражение, обозначение индекса, нижний предел и верхний предел) – выполняет суммирование по индексам. Пример: $sum(i\hat{}2, i, 1, 4) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$;

- $timeint(t1, t2,$ выражение$)$, $timeavg(t1, t2,$ выражение$)$ – вычисление определенного временного интеграла и среднего значения в пределах $t1$–$t2$;

- $withsol$ – оператор, который позволяет сослаться на выражения (переменную), определенный в другом решении в процессе расчета исследования. Например, нужно в решении оценить переменную A, определенную в решении $sol1$, тогда на нее можно сослаться как на withsol(‘sol1’, A).

Список библиографических ссылок

1. Stansel N. R. Induction heating—Selection of Frequency // Electrical Engineering. 1944, oct. № 8. С. 755–759.

2. Благовещенский С. Н. О работах И. Г. Бубнова по теории корабля // Труды Ленинградского кораблестроительного иститута. Л., 1951.

3. Веселовский О. Н., Коняев А. Ю., Сарапулов Ф. Н. Линейные асинхронне двигатели / под ред. И. П. Копылова. М. : ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ, 1991. 256 с.

4. Smolyanov Ivan, Sarapulov Fedor, Tarasov Fedor. Calculation of linear induction motor features by detailed equivalent circuit method taking into account non-linear electromagnetic and thermal properties // Computers & Mathematics with Applications. 2019, jun. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0898122119302780 (дата обращения: 06.07.2021).

5. Структурное моделирование электротехнологических систем и механизмов / В. А. Иванушкин [и др.]. Нижний Тагил : УГТУ-УПИ, 2006. 400 с.

6. Ostovic Vlado. Dynamics of Saturated Electric Machines. N.Y. : Springer New York, 1989. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-1-4613-8933-0 (дата обращения: 06.07.2021).

7. FEA Compare : сайт. 2019. URL: http://feacompare.com/ (дата обращения: 06.07.2021).

8. Pavlicek Karel, Kotlan Vaclav, Dolezel Ivo. Applicability and comparison of surrogate techniques for modeling of selected heating problems // Computers & Mathematics with Applications. 2019, feb. С. 2897–2910.

9. Baldan M., Nikanorov A., Nacke B. A novel multiple surrogate multi-objective decision making optimization alghorithm and its application in induction heating // International Conference on Heating by Electromagnetic Sources. Padua : SGE Ditoriali, 2019. С. 149–154.

10. Analytical Modeling of an Eddy-current Adjustable-speed Coupling System with a Three-segment Halbach Magnet Array [Electronic resourse] / Xin Dai [и др.] // Electric Power Components and Systems. № 17. С. 1891–1901.

11. Comsol inc : официальный сайт. 2019. URL: https://www.comsol.ru/ (дата обращения: 06.07.2021).

12. Официальный блог Comsol Multiphysics. URL: https://www.comsol.ru/blogs (дата обращения: 06.07.2021).

13. Беляев Е. Ф., Шулаков Н. В. Дискретно-полевые модели электрических машин. Пермь : Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. 457 с.

14. Беляев Е. Ф. Дискретно-полевые модели электрических машин. Пермь : Перм. гос. техн. ун-т, 2006. 165 с.

15. Сидоров О. Ю., Н. Сарапулов Ф., Ф. Сарапулов С. Методы конечных элементов и конечных разностей в электромеханике и электротехнологии. М. : Энергоатомиздат, 2010. С. 331.

16. Петров И. Г., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике. М. : БИНОМ, 2006. 523 с.

17. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М. : Мир, 1986. 229 с.

18. Шехтер Р. С. Вариационный метод в инженерных расчетах. М. : Мир, 1971. 291 с.

19. Dong Wenjun, Selvadurai A.P.S. A combined finite and infinite element approach for modeling spherically symmetric transient subsurface flow [Electronic resourse] // Computers & Geosciences. 2009, mar. Т. 35, № 3. С. 438–445. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0098300408002434 (дата обращения: 06.07.2021).

20. COMSOL. Comsol Multiphysics Reference Manual (Version 5.4). [Б. м.] : COMSOL, e-Book. 2018. 1662 с.

21. Введение в Comsol Multiphysics. [Б. м.] : COMSOL, e-Book. 2018. С. 179.

22. Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М. : ГИТТЛ, 1952. 687 с.

23. Буль О. Б. Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов: Магнитные цепи, поля и программа FEMM. М. : Академия, 2005. 336 с.

24. Вольдек А. И. Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом. М. : Энергия, 1970. 272 с.

25. Creusé Emmanuel, Nicaise Serge, Tang Zuqi. Residualbased a posteriori estimators for the A/phi magnetodynamic harmonic formulation of the Maxwell system // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2012. Т. 22, № 5. 30 с.

26. Paoli Gerhard, Biró Oszkár, Buchgraber Gerhard. Complex representation in nonlinear time harmonic eddy current problems // Magnetics, IEEE Transactions. 1998. Т. 34, № 5. С. 2625–2628.

27. Pop N. C., Caltun O. F. Jiles–Atherton Magnetic Hysteresis Parameters Identification // ACTA PHYSICA POLONICA A. 2011. Т. 120, № 3. С. 491–496.

28. Higher-Order Eggshell Method for Computation of Forces Acting on Ferromagnetic Bodies [Electronic resourse] / I. Doleel [и др.] // 9th IET International Conference on Computation in Electromagnetics (CEM 2014). L. : Institution of Engineering and Technology, 2014. С. 2.07–2.07. URL: https://digital-library.theiet.org/content/conferences/10.1049/cp.2014.0188 (дата обращения: 06.07.2021).

29. Shape optimization of electromagnetic actuators [Electronic resourse] Frantisek Mach [и др.] // 2014. ELEKTRO. IEEE, 2014, may. С. 595–598. URL: http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=6848967 (дата обращения: 06.07.2021).

30. Gieras Jacek F., Mews Jacek, Splawski Pawel. Analytical Calculation of Electrodynamic Levitation Forces in a Special-Purpose Linear Induction Motor // IEEE Transactions of Industry Applcations. 2012. Т. 48, № 1. С. 106–116.

31. Круминь Ю. К. Основы теории и расчета устройств с бегущим магнитным полем. Рига : Зинатне, 1983. С. 278.

32. Огарков Е. М. Квазитрехмерная теория линейных асинхронных двигателей. Пермь : Перм. гос. техн. ун-т, 2003. 240 с.

33. Сарапулов Ф. Н., Томашевский Д. Н. Теория электромагнитного поля. Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2007. 233 с.

34. Структурное моделирование тепловых процессов в электротермических установках / В. В. Гоман [и др.] ; под общ. ред. Ф. Н. Сарапулова. Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2009. 343 с.

35. Теплопередача : учеб. пособие для вузов / В. С. Чередниченко [и др.]. 2-е изд. Новосибирск : НГТУ, 2008. 232 с.

36. Литвин А. М. Теоретические основы теплотехники. Л. : Гос. эн. изд-во, 1950. 355 с.

37. Теплопередача : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 1. Основы теории теплопередачи / В. С. Чередниченко [и др.]. 2-е изд. Новосибирск : НГТУ, 2007. 343 с.

38. Теплопередача : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 2. Упражнения и задачи / В. С. Чередниченко [и др.]. 2-е изд. Новосибирск : НГТУ.

39. Induction-assisted laser welding taking into account phase changes [Elecronic Resourse] / Václav Kotlan [и др.] // COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering. 2019, jul. Т. 38, № 4. С. 1357–1371. URL: https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/COMPEL-10-2018-0422/full/html (дата обращения: 06.07.2021).

Учебное издание

Смольянов Иван Александрович,
Сарапулов Федор Никитич,
Сарапулов Сергей Федорович,
Бычков Сергей Алексеевич,
Тарасов Федор Евгеньевич

Математическое моделирование электромеханических установок в среде Comsol Multiphysics

Редактор И. В. Меркурьева
Верстка (LaTex) А. А. Юрловой

Подписано в печать 16.11.2021. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 20,6.
Уч.-изд. л. 16,0. Тираж 30 экз. Заказ 256.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

ПИЗЕ УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2020

9 785799 633738